# Prüfung für Mathematisches Denken 22.6.2006

Name: Mat. Nr.

Vektoren werden **fett** mit Kleinbuchstaben geschrieben

**Aufgabe 1:** Gegeben ist ein Viereck mit den Eckpunkten $A(0,0), B(10,0), C(12,6), D(4,10)$ Man zeige unter Anwendung der Vektorrechnung, dass die Vektoren $\overrightarrow{M_1M_4}$ und $\overrightarrow{M_2M_3}$ parallel

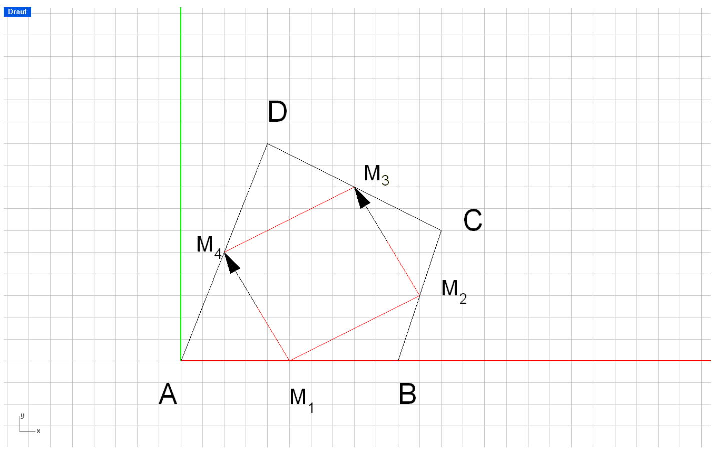


Abbildung 1: Skizze Aufgabe 1

sind (1/2P). Weiter ist zu berechnen:

1. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{M_1M_4}(1/2P)$
2. Die Fläche des Vierecks $ABCD$(1P)
3. Die Fläche des Vierecks $M_1M_2M_3M_4$(1P)
4. Den Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$ $\overrightarrow{M_1M_4}(1P)$

Lösung:

1. Die Mittelpunkte der Seiten sind:

$$M_1 = (5,0),\ M_2 = (11,3),\ M_3 = (8,8),\ M_4 = (2,5) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{M_1M_4} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix},\ \overrightarrow{M_2M_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

2. Länge $\overrightarrow{M_1M_4} = \sqrt{34} = 5.831.$

3. Fläche berechnet man am Besten mit dem äußeren Produkt:

$$F = F_1 + F_2 = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|}{2} + \frac{|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AF}|}{2}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 60 \end{pmatrix} \right| \Rightarrow F_1 = 30$$

$$\left| \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 96 \end{pmatrix} \right| \Rightarrow F_2 = 48 \Rightarrow$$

$$F = F_1 + F_2 = 78$$

4. Da $M_1M_2M_3M_4$ ein Parallelogram ist, gilt:

$$F = |\overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4}| = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 39 \end{pmatrix} \Rightarrow F = 39$$

**Aufgabe 2:** Durch die Matrix $\mathbf{P}$ ist eine Projektion aus dem dreidimensionalen Raum auf eine Bildebene allgemein gegeben.

$$\underline{\mathbf{x}}^{\varphi} = \mathbf{P}\underline{\mathbf{x}}$$

mit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_1\, z_1 + u_2\, z_2 + u_3\, z_3 & -u_1\, z_0 & -u_2\, z_0 & -u_3\, z_0 \\ -u_0\, z_1 & u_0\, z_0 + u_2\, z_2 + u_3\, z_3 & -u_2\, z_1 & -u_3\, z_1 \\ -u_0\, z_2 & -u_1\, z_2 & u_1\, z_1 + u_0\, z_0 + u_3\, z_3 & -u_3\, z_2 \\ -u_0\, z_3 & -u_1\, z_3 & -u_2\, z_3 & u_1\, z_1 + u_2\, z_2 + u_0\, z_0 \end{bmatrix}$$

Man bestimme die Abbildungsmatrix, wenn eine **Normalprojektion** auf die Bildebene $x - y = 0$ gegeben ist. Damit gilt für die Bildebene: $\rightarrow u_1 = 1, u_2 = -1$. Man bestimme

1. Die Abbildungsmatrix $\mathbf{P}$ (1P).
2. Das Bild des Punktes $P(1:3:0:4)$ (1P).
3. Die Bilder der Einheitspunkte $E_x(1:1:0:0), E_y(1:0:1:0), E_z(1:0:0:1)$ (1P).
4. Das Bild des Fernpunktes der z-Achse (1P).

Lösung: Da eine Normalprojektion vorliegen soll gilt $\mathbf{z} = \mathbf{u}$, $(u_1, u_2, u_3)^T = (z_1, z_2, z_3)^T$ (Skriptum S.23).

1. Einsetzen:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

.

2.

$$\mathbf{P}\begin{pmatrix}1\\3\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\3\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\4\end{pmatrix}$$

3.

$$E_x'=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\ E_y'=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\ E_z'=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

4. Fernpunkt ändert sich nicht!

$$F_z'=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

**Aufgabe 3:** Eine räumliche Bewegung ist durch Zusammensetzung der beiden Transformationen $\mathbf{T_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\4&\cos(\frac{\pi}{2})&-\sin(\frac{\pi}{2})&0\\3&\sin(\frac{\pi}{2})&\cos(\frac{\pi}{2})&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{T_2}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\-2&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ gegeben. Man beantworte folgende Fragen:

1. Wie lautet die Darstellung der Gesamttransformation $\mathbf{T}=\mathbf{T_1}\cdot\mathbf{T_2}$? (1P)
2. Wie lauten die Koordinaten des Bildpunktes von $P(1,1,-1)$ bei $\mathbf{T}$?(1P)
3. Ist es egal in welcher Reihenfolge die Transformationen ausgeführt werden? (1P)
4. Wie groß ist die Determinante der Gesamttransformation $\mathbf{T}$? (1P)

Lösung:

1.

$$\mathbf{T_1}\cdot\mathbf{T_2}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\6&0&-1&0\\4&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

2.

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1\\5\\5\\1\end{pmatrix}$$

3. Nein

$$\mathbf{T_2} \cdot \mathbf{T_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.

$$\det \mathbf{T} = 1$$

**Aufgabe 4:** Auf der durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v^2 \\ z &= u^2 - v \end{aligned}$$

gegeben Fläche wird durch $u = 4t$ und $v = 2t$ eine Flächenkurve gegeben. Man bestimme:

1. Die Tangente and die Flächenkurve zum Parameterwert $t = \frac{1}{2}$ (1P).
2. Die Tangentialebene an die Fläche im Berührpunkt der Kurventangente(1P).
3. Die Flächennormale im Berührpunkt der Tangentialebene(1P).
4. Den Winkel zwischen Flächenkurve und Flächennormale im Berührpunkt(1P).

Lösung:

1. Einsetzen von $u = 4t$ und $v = 2t$ in die Flächengleichung ergibt

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 4t - 4t^2 \\ 16t^2 - 2t \end{pmatrix}, \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 - 8t \\ 32t - 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow$$

$$t : \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix}$$

2.

$$F_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2u \end{pmatrix}, \ F_v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2v \\ -1 \end{pmatrix}$$

Für $t = \frac{1}{2}$ ergibt sich $u = 2, v = 1$ und damit durch Einsetzen als Tangentialebene

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.

$$F_u \times F_v = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Tangente liegt in der Tangentialebene der Fläche und steht daher normal auf die Flächennormale.

**Aufgabe 5:** Gegeben sind die drei Kontrollpunkte $\mathbf{b_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ einer räumlichen Bezierkurve. Man berechne den Bezierkurvenpunkt zum Parameterwert $t = \frac{1}{3}$ (2P) und skizziere in einer frei zu wählenden axonometrischen Ansicht das Kontrollpunktepolygon, den Casteljeau Algorithmus und die entstehende Bezierkurve.
Lösung:

$$b_0^1 = (1 - \frac{1}{3}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$b_1^1 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b_0^2 = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Weiters sind folgende Fragen zu beantworten:

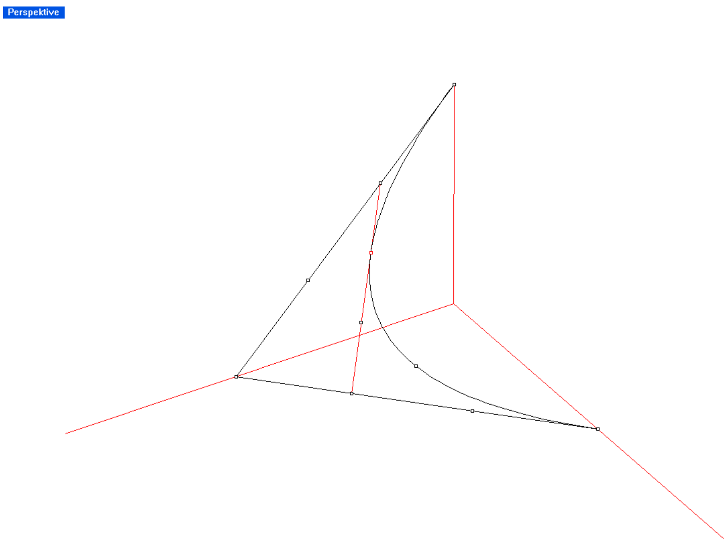


Abbildung 2: Skizze Bezierkurve

1. Wie hängt die Ordnung einer Bezierkurve mit der Anzahl der Kontrollpunkte zusammen?
   Die Ordnung einer Bezierkurve ist Anzahl der Kontrollpunkte minus eins.
2. Was versteht man unter einem B-Spline?
   Eine zusammengesetzte Bezierkurve mit fester Ordnung.

**Aufgabe 6:** In der Abbildung 3 sind zwei Zerlegungen einer Fläche in Zellen gegeben . Man berechne aus beiden Zerlegungen die Eulersche Charakteristik und beantworte folgende Fragen:
Lösung:
Fläche 1: 4 Punkte , Sechs Kurvenstücke und 4 Flächen

$$\Rightarrow \chi = 4 - 6 + 4 = 2$$

Fläche 2: 8 Punkte, 12 Kurvenstücke und 6 Flächen

$$\Rightarrow \chi = 8 - 12 + 6 = 2$$

1. Sind die beiden Flächen topologisch äquivalent? Ja!

2. Begründung obiger Antwort. Sie haben dieselbe Eulersche Charkteristik, sind beide geschlossen und sind beide orientierbar (beide sind eine Kugel!!)

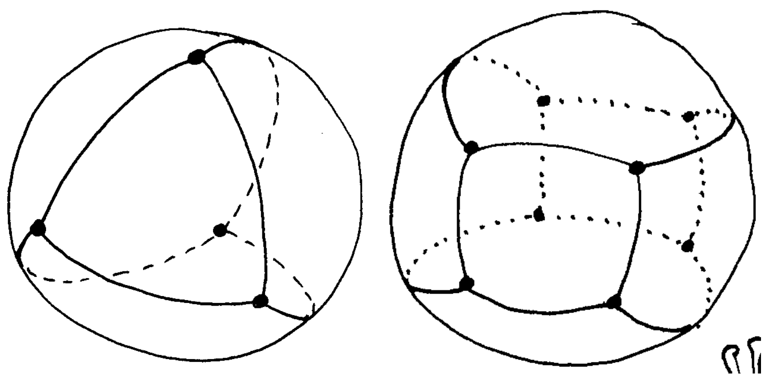

Abbildung 3: Topologie

In der Abbildung 4 ist eine geschlossene Kurve gegeben. Man gebe eine Zerlegung in zusammenziehbare Kurven an und berechne die Eulersche Charakteristik.
Lösung:
Zerlegung: 1 Punkt und ein Kurvenstück:

$$\Rightarrow \chi = 1 - 1 = 0$$

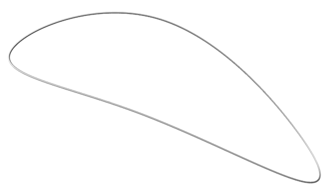

Abbildung 4: Kurve

Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit zwei Flächen topologisch äquivalent sind?
Lösung:

1. Gleiche Zusammenhangszahl oder gleiche Eulersche Charkteristik.
2. beide Flächen entweder offen oder geschlossen.
3. Beide Flächen entweder orientierbar oder nicht orientierbar.

Punkteverteilung

Aufgabe 1: 4P
Aufgabe 2: 4P
Aufgabe 3: 4P
Aufgabe 4: 4P
Aufgabe 5: 4P
Aufgabe 6: 4P
Summe: 24 Punkte

Notenschema
24-22 Punkte: sehr gut
21-19 Punkte: gut
18-15 Punkte: befriedigend
14-12 Punkte: genügend
<12 Punkte: nicht genügend