Prüfung für Mathematisches Denken 2.3.2004

Name: Mat. Nr.

Vektoren werden **fett** mit Kleinbuchstaben geschrieben!

Aufgabe 1: Gegeben ist ein Rhombus (Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten) mit den Eckpunkten A, B, C, D. Man zeige durch Anwendung der Vektoraddition und der inneren Vektormultiplikation, dass die Diagonalen des Rhombus aufeinander normal stehen (Skizze! (1P)).
Lösung:

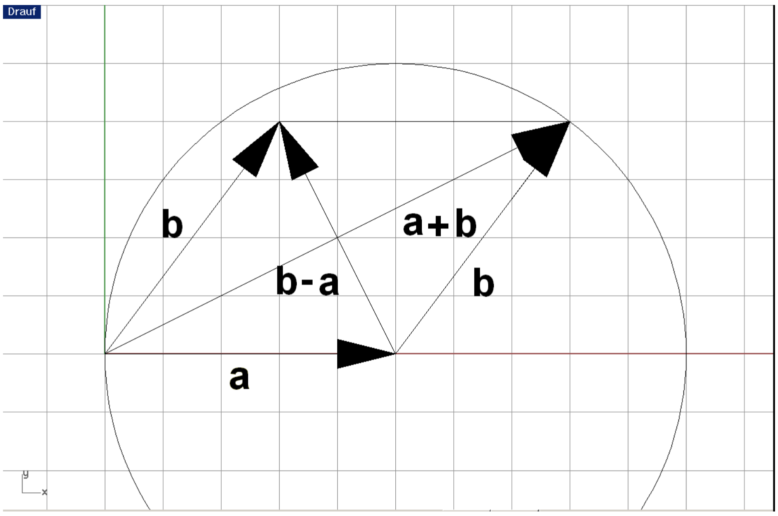

Abbildung 1: Skizze zu Aufgabe 1

Da das Viereck ein Rhombus ist, gilt wegen gleich langer Seiten auf jeden Fall $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}$. Weiters ist aus der Skizze ersichtlich, dass die beiden Diagonalen mit den Vektoren $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ $\mathbf{d} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ angesetzt werden können (1P). Mit den Rechenregel im Skriptum Seite 15 Formel (28) rechnet man unter Berücksichtigung, dass $\mathbf{c} \cdot \mathbf{d} = 0$ gelten muss (1P)

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0 \Rightarrow$$
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$$

Aufgabe 2:
Gegeben sind drei Kräfte $\mathbf{f_i}, i = 1, \ldots, 3$ (symbolisiert durch drei Vektoren), die an einem Punkt O angreifen.

$$\mathbf{f_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f_2} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Man ermittle rechnerisch jene Kraft, die die drei gegebenen Kräfte im Gleichgewicht hält.

2. Man berechne den Normalvektor $\mathbf{n}$ auf $\mathbf{f_1}$ und den Summenvektor $\mathbf{f_s} = \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2} + \mathbf{f_3}$ ($\mathbf{n} = \mathbf{f_1} \times \mathbf{f_s}$). Was bedeutet geometrisch die Umkehrung der Reihenfolge beim Berechnen des äußeren Produkts?

3. Man berechne das innere Produkt der Vektoren $\mathbf{f_2}$ und $\mathbf{f_3}$.

<u>Lösung:</u>

1. $$\mathbf{f_s} = \mathbf{f_1} + \mathbf{f_2} + \mathbf{f_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Gleichgewichtskraft: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (1P)

2. $\mathbf{n} = \mathbf{f_1} \times \mathbf{f_s}) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ (1P). Umkehren der Reihenfolge bedeutet den inversen Vektor (der Addition), oder geometrisch den Normalvektor auf die andere Seite der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene (1P).

3. $\mathbf{f_2} \cdot \mathbf{f_3} = -121$ (1P).

Aufgabe 3: Gegeben ist ein Dreieck mit den Eckpunkten A(5,8), B(16,12), C(9,17). Weiters sind zwei Transformationen gegeben:

1. Schiebung T mit dem Vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

2. Drehung D um 90° um den Ursprung des Koordinatensystems,

Man ermittle die Gesamttransformation einmal indem Schiebung und Drehung zusammengesetzt werden und einmal wenn Drehung und Schiebung zusammengesetzt werden.

1. Wie lauten die Koordinaten des Dreiecks nach beiden Transformationsreihenfolgen?

2. Man zeichne in Abb. sämtliche Transformationen in dem gegebenen Koordinatensystem ein. Ein Kästchen im Koordinatenraster steht für eine Einheit.

3. Wie lauten die Transformationsmatrizen für sämtliche Transformationen (vier Transformationen: Schiebung, Drehung und zwei Zusammensetzungen)?

4. Man berechne die Determinante von einer der beiden zusammengesetzen Transformationen.

<u>Lösung:</u>

1. $\mathbf{TD} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (1P) Bildpunkte

   $$A' = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 20 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ 13 \end{pmatrix} (1P)$$

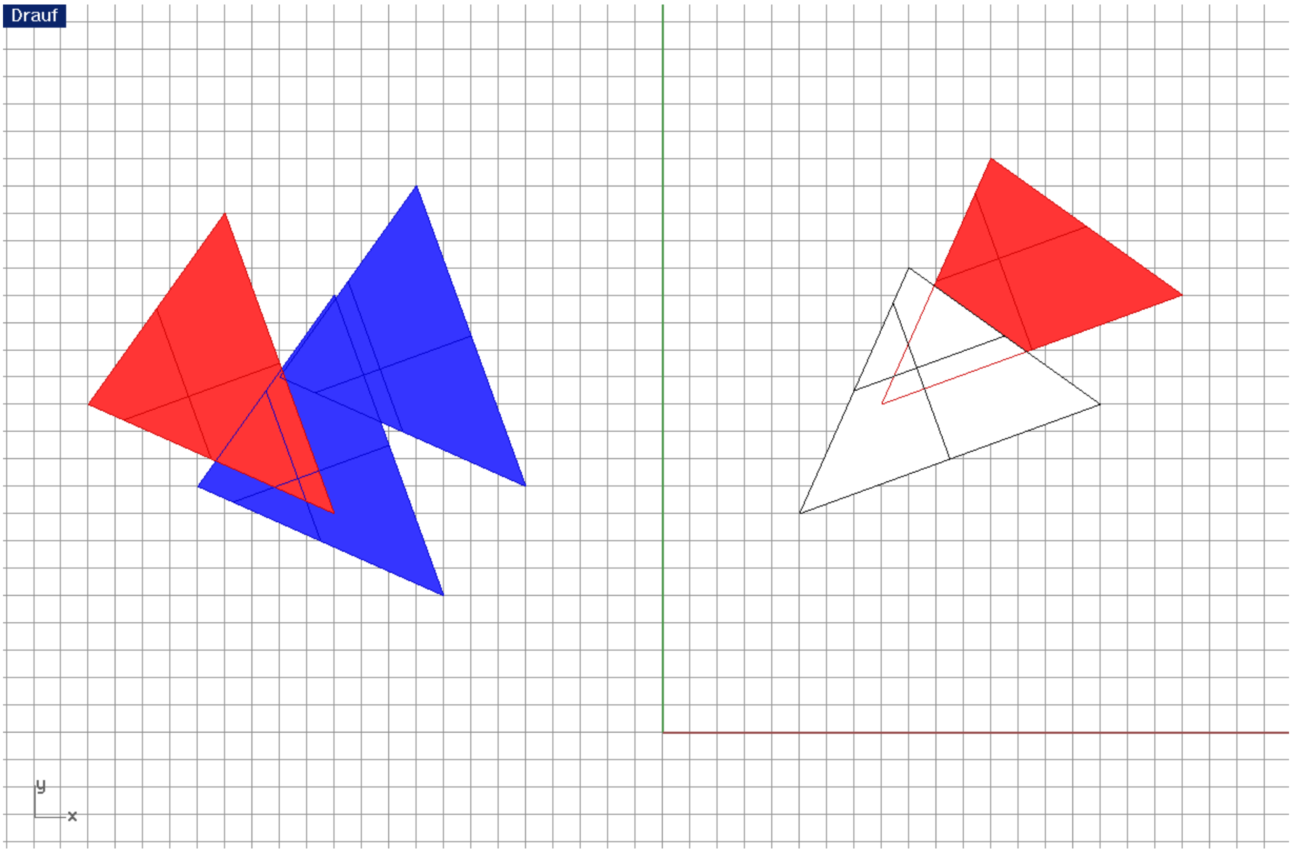

Abbildung 2: Zeichnung zu Aufgabe 3 (1P)

$$\mathbf{DT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

Bildpunkte

$$A'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 8 \end{pmatrix}, B'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -16 \\ 19 \end{pmatrix} C'' = \begin{pmatrix} 1 \\ -21 \\ 12 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

2. Die Transformationsmatrizen lauten

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

3. Die Determinante beider zusammengesetzter Matrizen (Transformationen) ist 1 (1P)+.

Aufgabe 4: Gegeben sind die vier Kontrollpunkte $\mathbf{b_0} = (1,1)^T, \mathbf{b_1} = (5,2)^T, \mathbf{b_2} = (8,5)^T, \mathbf{b_3} = (3,7)^T$. Man berechne nach dem Casteljeau-Algorithmus den Bezierkurvenpunkt zum Parameterwert $t = \frac{1}{2}$. Weiters zeichne man in Abb. **??** das Kontrollpolygon samt dem berechneten Kurvenpunkt und skizziere danach den ungefähren Verlauf der Bezierkurve unter Beachtung der Bezierkurveneigenschaften.

Lösung:

1. Schritt:(1P)

$$\mathbf{b_0^1} = (1-\frac{1}{2})\mathbf{b_0} + \frac{1}{2}\mathbf{b_1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b_1^1} = (1-\frac{1}{2})\mathbf{b_1} + \frac{1}{2}\mathbf{b_2} = \begin{bmatrix}\frac{13}{2}\\\frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b_2^1} = (1-\frac{1}{2})\mathbf{b_2} + \frac{1}{2}\mathbf{b_3} = \begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\6\end{bmatrix}$$

2. Schritt:(1P)

$$\mathbf{b_0^2} = (1-\frac{1}{2})\mathbf{b_0^1} + \frac{1}{2}\mathbf{b_1^1} = \begin{bmatrix}\frac{19}{4}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b_1^2} = \begin{bmatrix}6\\\frac{19}{4}\end{bmatrix}(1P)$$

3. Schritt:(1P)

$$\mathbf{b_0^3} = \begin{bmatrix}\frac{43}{8}\\\frac{29}{8}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\frac{3}{8}\\3\frac{5}{8}\end{bmatrix}$$

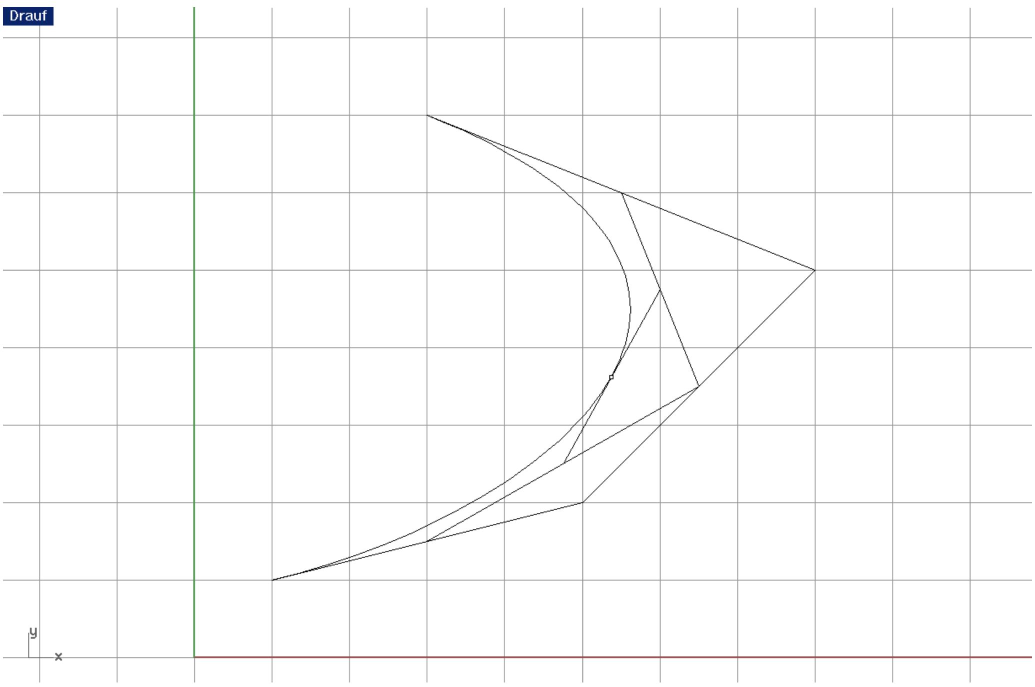

Abbildung 3: Bezierkurve

Aufgabe 5 Eine Raumkurve ist gegeben durch $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} t+\frac{t^3}{3} \\ t-\frac{t^3}{3} \\ t \end{pmatrix}$. Man berechne für den Parameterwert $t=1$

1. die Tangente,
2. die Krümmung,
3. die Schmiegebene,
4. den Hauptnormalenvektor.

Lösung:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1+t^2 \\ 1-t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\mathbf{x}}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2t \\ -2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{x}}(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} (1P)$$

1. Tangente:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1P)$$

2.

$$\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$$

$$|\dot{\mathbf{x}}|^3 = (\sqrt{5})^3 = 5\sqrt{5} \Rightarrow$$

$$\kappa^* = \frac{2\sqrt{6}}{5\sqrt{5}} \qquad (1P)$$

3. Schmiegebene

$$2z - x - y = 0 \qquad (1P)$$

4. Hauptnormalenvektor:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{6}} \\ -\frac{5}{\sqrt{5}\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad (1P)$$

Aufgabe 6:

1. Man gebe eine Zerlegung des Volumentorus in zusammenziehbare Zellen an und berechne dann die Eulersche Charakteristik.
2. In der Abbildungen 4 ist ein und dasselbe Objekt mehrfach abgebildet. Man zerlege es in zusammenziehbare Zellen und berechne die Eulersche Charakteristik. Kann das Objekt in eine Kugel oder in einen Torus deformiert werden?

Lösung:

1. Der Volltorus ist zerlegbar: in eine Kreisscheibe und ein Volumen $\Rightarrow$

$$\chi = 1 - 1 = 0 \qquad (1P)$$

2. Das Objekt besteht aus 16 Punkten, 32 Kanten und 16 Flächen $\Rightarrow$

$$\chi = 16 - 32 + 16. \qquad (1P)$$

   Es läßt sich in den Torus deformieren (1P) .

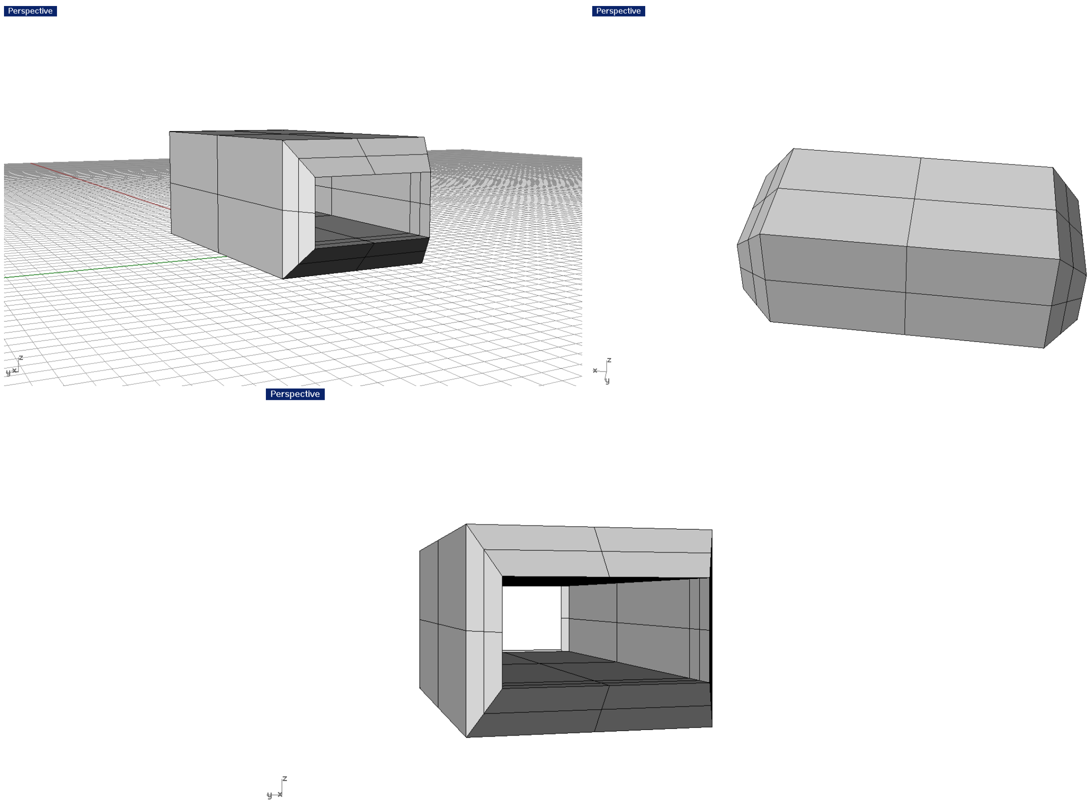

Abbildung 4: Quader