Toleranzanalyse für Graphen geometrischer Relationen

Johannes Wallner Hans-Peter Schröcker

Institut für Diskrete Mathematik und Geometrie
Technische Universität Wien

Vorau, 9. Juni 2004

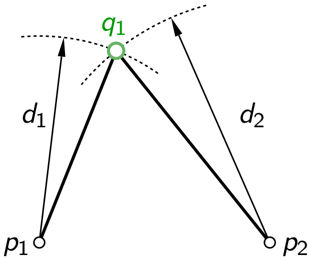
Geometrische Relationen

- Festlegen geometrischer Objekte (Punkte, Geraden, Ebenen, Kugeln, ...) durch gegebene Relationen zwischen den Objekten (Abstand, Winkel, Inzidenz, ...)
- Auswirkungen von Ungenauigkeiten in den Eingabeobjekten

Anwendungen

- parametrisches Konstruieren
- Distanzgeometrie (Positionsbestimmung, Molekülkonformation)
- ...

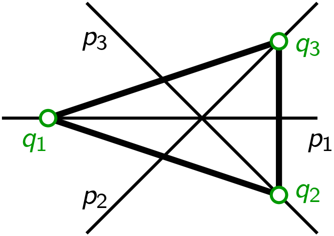
Beispiele



Beispiel

Zwei feste Punkte p_1, p_2 haben gegebene Abstände d_1, d_2 zu einem dritten Punkt q_1.

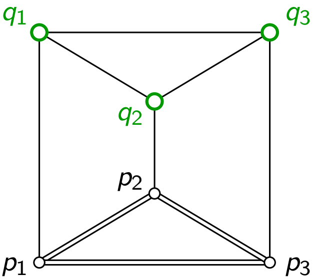
Beispiele



Beispiel

Drei Punkte q_1, q_2, q_3 mit festen gegenseitigen Abständen d_{ij} sind inzident mit drei festen Geraden.

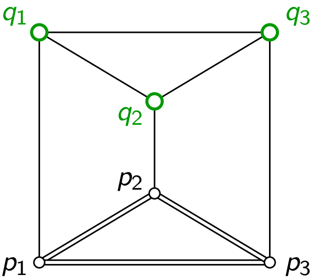
Relationsgraphen

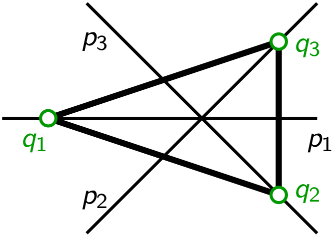


Geometrische Objekte und Relationen zwischen ihnen können durch Relationsgraphen visualisiert werden.

- Ecken: Geometrische Objekte
- Kanten: Relationen zwischen den Objekten

Relationsgraphen





Rechnerische Lösung

- Die geometrischen Einheiten p_i und q_j werden durch geeignete Koordinaten beschrieben: $p_i = (x_{\xi_i}, x_{\xi_i+1}, \ldots)$, $q_j = (y_{\eta_j}, y_{\eta_j+1}, \ldots)$. Diese Koordinaten werden in Vektoren $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_m)$ zusammengefasst.
- Die Relationen zwischen den Objekten werden durch Bedingungsgleichungen modelliert:

$$c_1(x, y) = \cdots = c_m(x, y) = 0.$$

- Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$F(x, y) = \big(c_1(x, y), \ldots, c_m(x, y)\big) = 0.$$

Lokale Lösungen

Definition

Es sei (u, v) eine Lösung von $F(x, y) = 0$ und $G\colon U \to \mathbb{R}$ sei definiert in einer zusammenhängenden Umgebung U von u so dass

$$G(u) = v \quad \text{und} \quad \forall x \in U\colon F(x, G(x)) = 0.$$

Dann heißt G eine lokale Lösung, welche die Lösung (u, v) fortsetzt.

Die lokale Lösung existiert und ist im wesentlich eindeutig wenn $F_{,y}(u, v)$ regulär ist.

Toleranzanalyse

Man finde die möglichen Positionen von $y = (q_1, q_2, \ldots)$ wenn die festen Objekte $p_1, p_2, \ldots$ in Toleranzzonen $P_1, P_2, \ldots$ variieren.

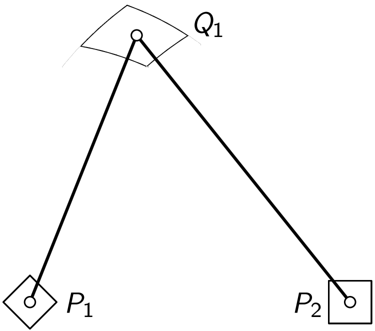
Erste Interpretation:

Man löse $F(x, y) = 0$, für $x \in X := P_1 \times P_2 \times \cdots$.

Zweite Interpretation:

Für eine lokale Lösung G berechne man $G(X)$ wobei $X := P_1 \times P_2 \times \cdots$.

Ein einfaches Fachwerk



Beispiel

Die exakte Toleranzzone der lokalen Lösungen wird von Kreisbögen begrenzt.

Die komplette Lösung beinhaltet auch das Spiegelbild von Q_1 an der Geraden $p_1 p_2$.

Linearisierte Lösung

Exakte Lösung kann schwierig sein $\Longrightarrow$ Linearisierung

Plan

- Taylorentwicklung von $F(x, y) = \big(c_1(x, y), \ldots, c_m(x, y)\big)$.
- linearisierte lokale Lösung
- obere Schranke für den Linearisierungsfehler
- Toleranzanalyse

Taylorentwicklung

Bedingungsfunktion $F\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $(x, y) \mapsto F(x, y)$.

$$\begin{aligned} F(u+h, v+k) = F(u, v) & \\ & + F_{,x}(u,v)\cdot h + F_{,y}(u,v)\cdot k \\ & + 1/2\ F_{,xx}(u+\theta h, v+\theta k)[h,h] \\ & + \ F_{,xy}(u+\theta h, v+\theta k)[h,k] \\ & + 1/2\ F_{,yy}(u+\theta h, v+\theta k)[k,k] \end{aligned}$$

mit $\theta \in [0,1]$ und

$$DF = (F_{,x}, F_{,y}), \quad D^2F = \begin{pmatrix} F_{,xx} & F_{,xy} \\ F_{,xy} & F_{,yy} \end{pmatrix}$$

Linearisierte lokale Lösung

Taylorentwicklung der lokalen Lösung:

$$v = G(u), \quad v + k = G(u + h) \quad \Longrightarrow$$
$$v + k = v + G_{,x}(u) \cdot h + 1/2 \cdot G_{,xx}(u + \theta h)[h, h]$$

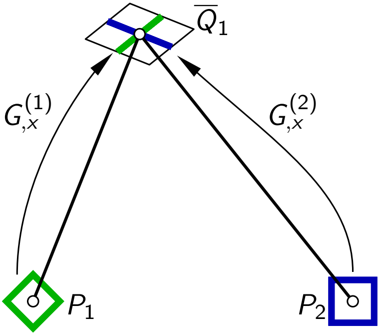
Taylorentwicklung der Bedingungsfunktion:

$$0 = F(u + h, v + k) = 0 + F_{,x}(u, v) \cdot h + F_{,y}(u, v) \cdot k + \cdots$$

Es folgt:

$$G_{\mathrm{lin}}(u + h) = G(u) + G_{,x}(u) \cdot h, \quad G_{,x}(u) = -F_{,y}(u, v)^{-1} F_{,x}(u, v)$$

Ein einfaches Fachwerk II



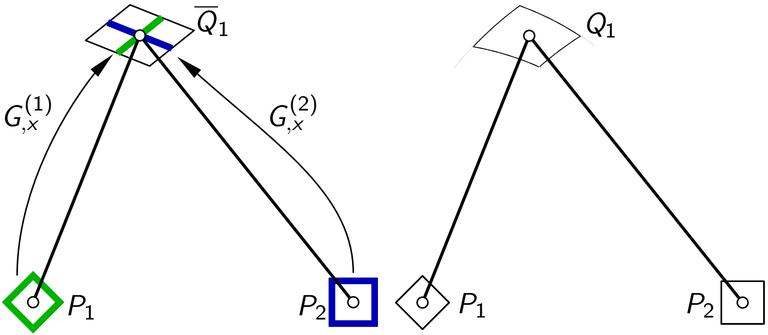
Beispiel

$$G_{\text{lin}}(u+h) = G(u) + G_{,x}(u)\cdot h$$

$$G_{,x} = F_{,y}^{-1}F_x = (G^{(1)}, G^{(2)}) = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -10 & -25 & -20 & 25 \\ -8 & -20 & 8 & -10 \end{pmatrix}$$

Die linearisierte Toleranzzone $\overline{Q}_1$ ist ein Parallelogramm (Minkowski-Summe $G^{(1)}_{,x}P_1 + G^{(2)}_{,x}P_2$).

Ein einfaches Fachwerk II



Toleranzanalyse

Wir betrachten nur Teilmengen von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ wo

$$\|F_{,xx}\| \leq \alpha, \quad \|F_{,xy}\| \leq \beta, \quad \|F_{,yy}\| \leq \gamma$$

und definieren $\Delta(s,t) := \frac{1}{2}(\alpha s^2 + 2\beta st + \gamma t^2)$.
Der Linearisierungsfehler einer lokalen Lösung ist begrenzt durch

$$\|k - k_{\text{lin}}\| \leq \|F_{,y}^{-1}(u,v)\| \cdot \Delta(\|h\|, \|k\|).$$

Bemerkung: Die Berechnung von Δ ist besonders einfach, wenn F quadratisch ist.

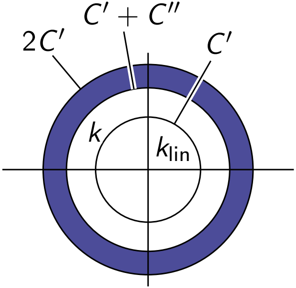
Toleranzanalyse

Satz

$$C_{\max} := \frac{\|G_{,x}(u)\|}{\|F_{,y}(u,v)^{-1}\| \cdot \Delta(1, 2\|G_{,x}(u)\|)},$$

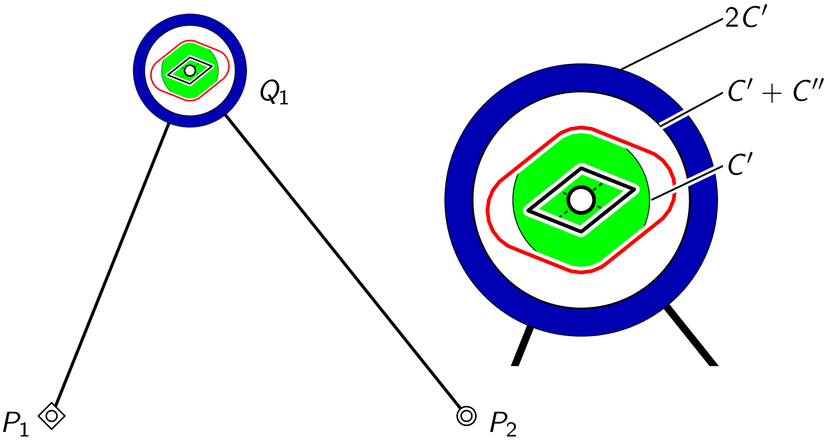
$$\|h\| \leq C < C_{\max},$$

$$C' := \|G_{,x}(u)\| C$$

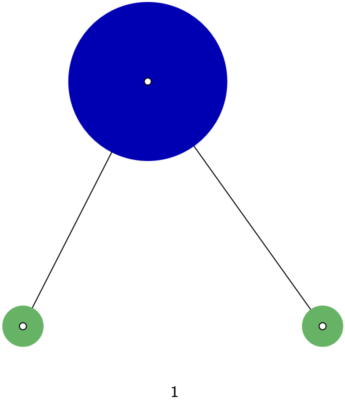


$$\Longrightarrow \ \|k_{\text{lin}}\| \leq C' \text{ und } \exists C'' < C' \colon \|k\| \leq C' + C'', \ \|k - k_{\text{lin}}\| \leq C''$$

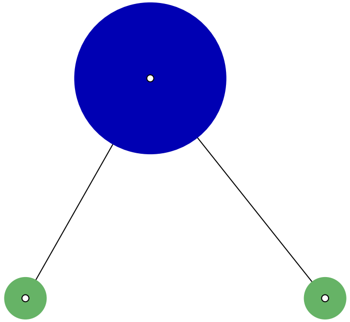
Ein einfaches Fachwerk III



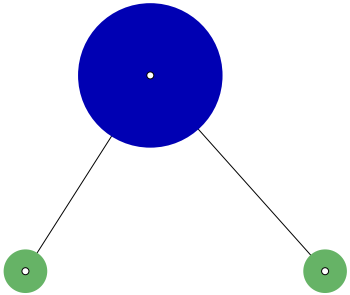
Ein einfaches Fachwerk III



Ein einfaches Fachwerk III

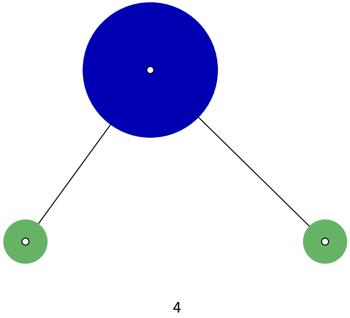


Ein einfaches Fachwerk III

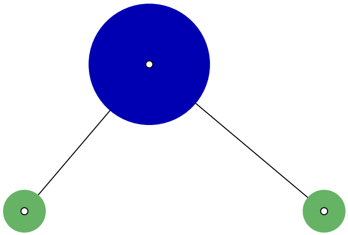


3

Ein einfaches Fachwerk III

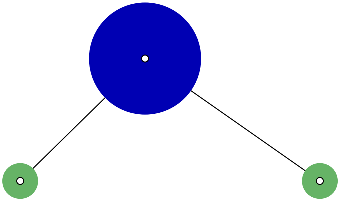


Ein einfaches Fachwerk III



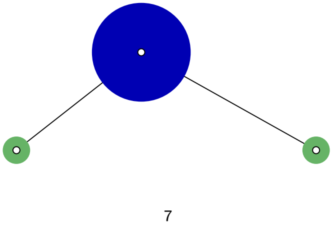
5

Ein einfaches Fachwerk III

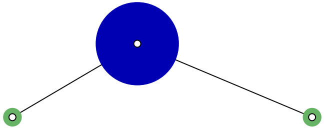


6

Ein einfaches Fachwerk III

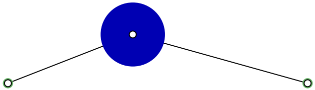


Ein einfaches Fachwerk III



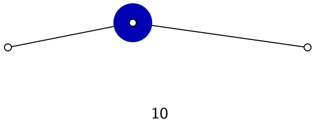
8

Ein einfaches Fachwerk III

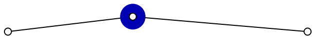


9

Ein einfaches Fachwerk III

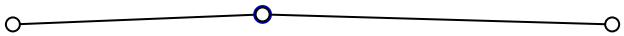


Ein einfaches Fachwerk III



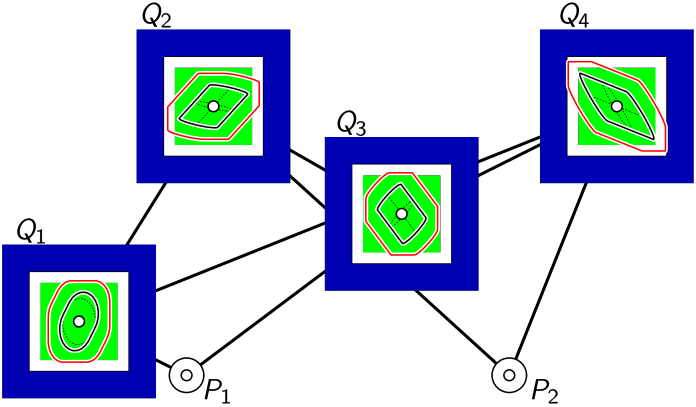
11

Ein einfaches Fachwerk III

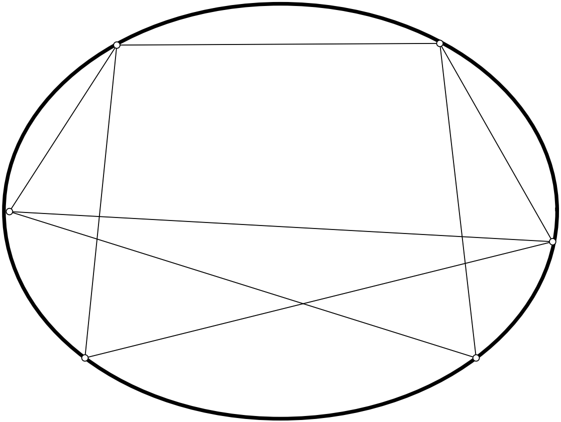


12

Ein komplexeres Fachwerk

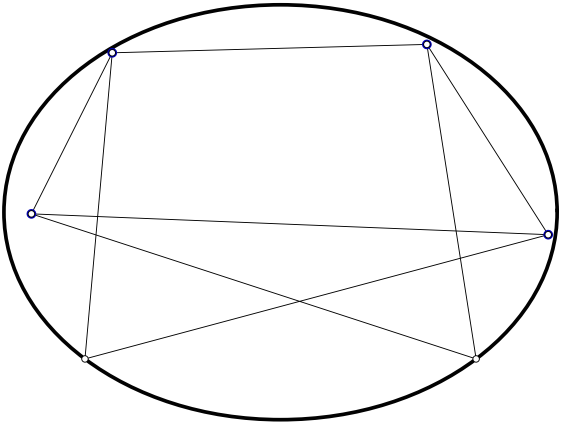


Ein komplexeres Fachwerk



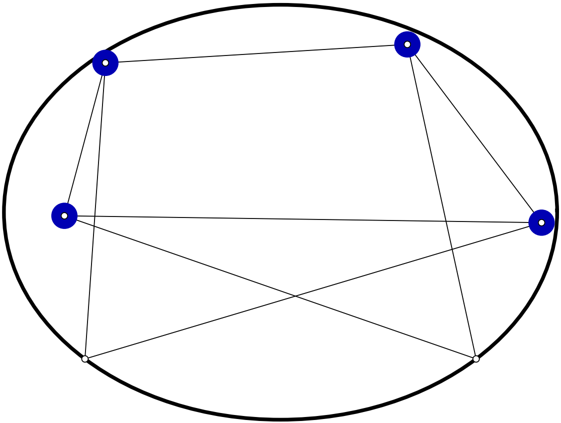
1

Ein komplexeres Fachwerk



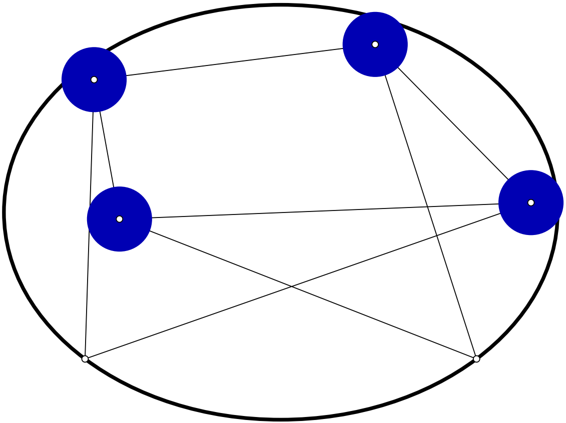
2

Ein komplexeres Fachwerk



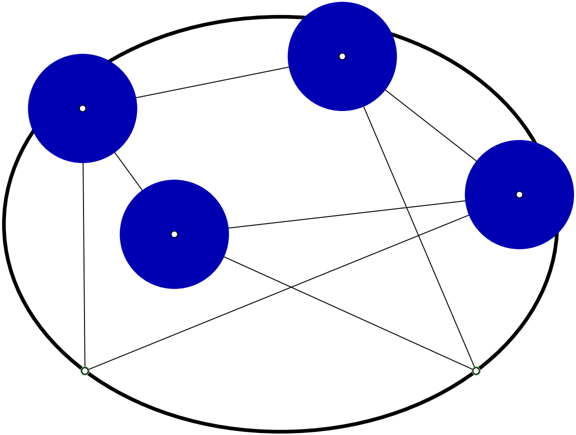
3

Ein komplexeres Fachwerk

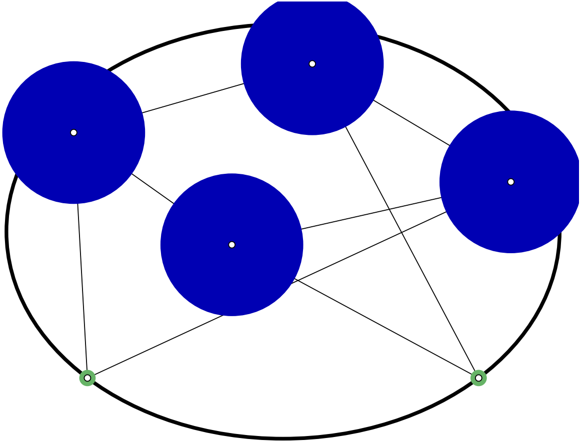


4

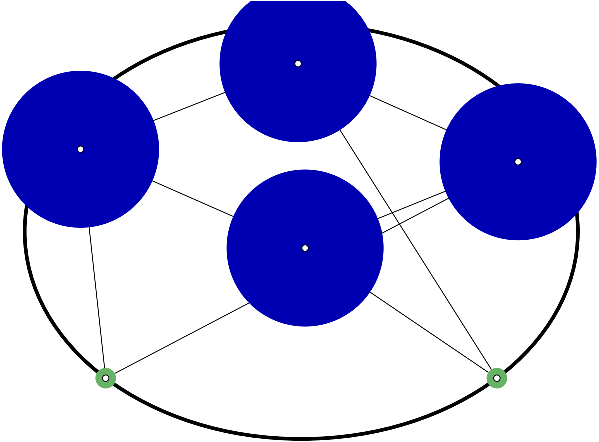
Ein komplexeres Fachwerk



Ein komplexeres Fachwerk

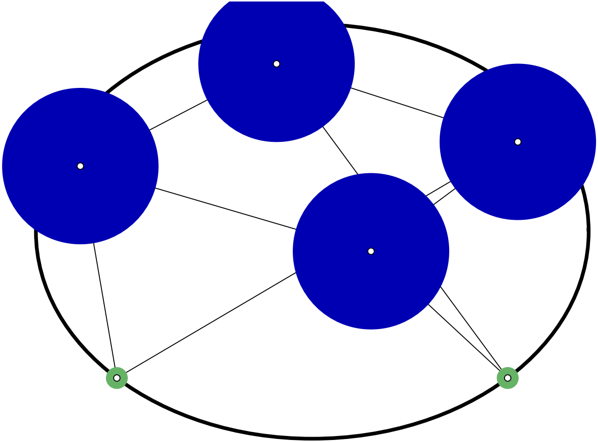


Ein komplexeres Fachwerk



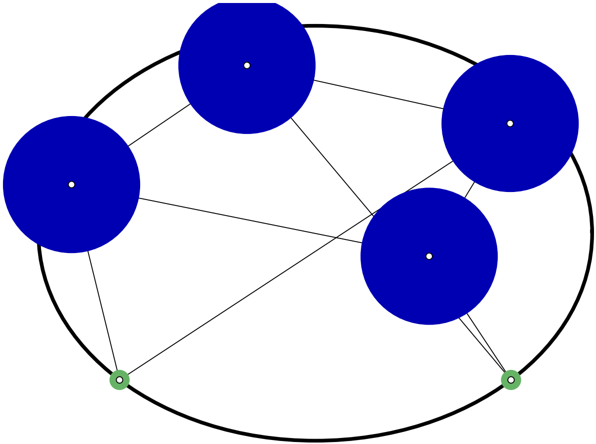
7

Ein komplexeres Fachwerk



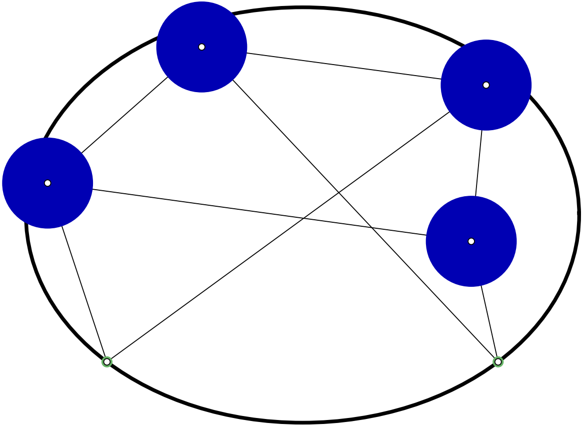
8

Ein komplexeres Fachwerk



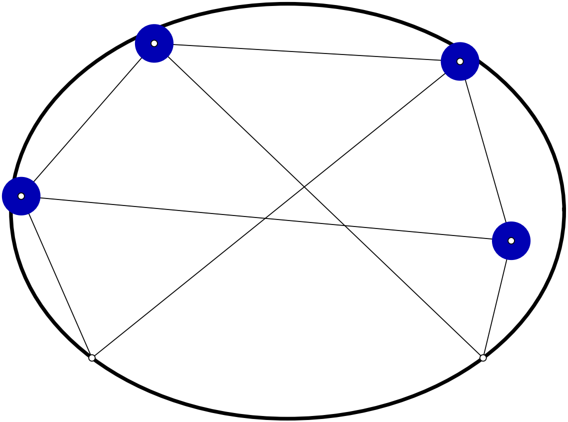
9

Ein komplexeres Fachwerk



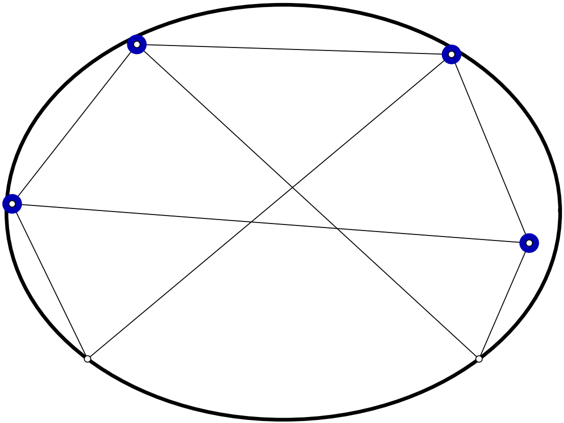
10

Ein komplexeres Fachwerk



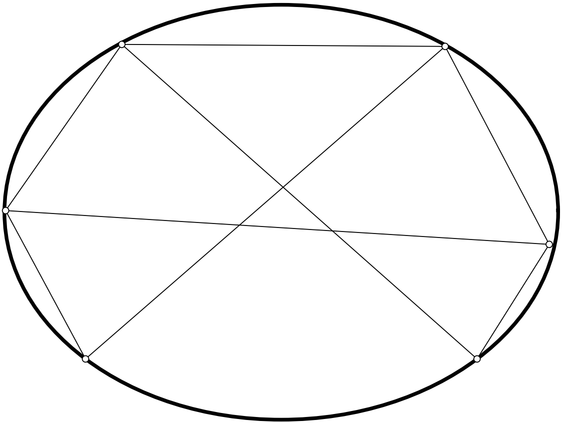
11

Ein komplexeres Fachwerk



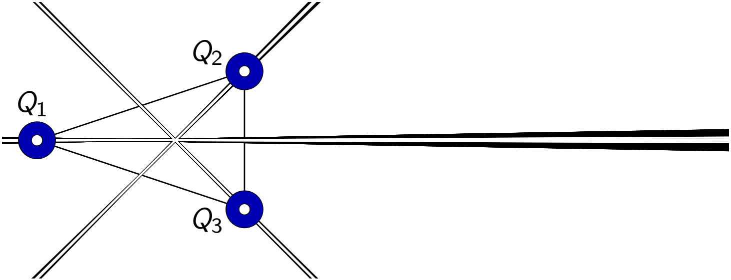
12

Ein komplexeres Fachwerk



13

Dreieck



$c_i(x, y) = 0 \rightsquigarrow \lambda_i c_i(x, y) = 0 \implies$
$C : C'$ bleibt unverändert, $C_{\max}$ kann vergrößert werden.

Heuristik: Die Koeffizienten in den Gleichungen $c_i(x, y) = 0$ sollen dieselbe Größenordnung haben.

Schlussfolgerung

- Konzept zur Toleranzanalyse geometrischer Relationen basierend auf Linearisierung und Fehlerabschätzung
- Schranken für die Eingangsdaten die Schranken für die Lösungsdaten garantieren
- Besonders gut geeignet für quadratische Probleme (keine große Einschränkung)