# Geometrische Konstruktionen mit diskretisierten Zufallsvariablen

Hans-Peter Schröcker

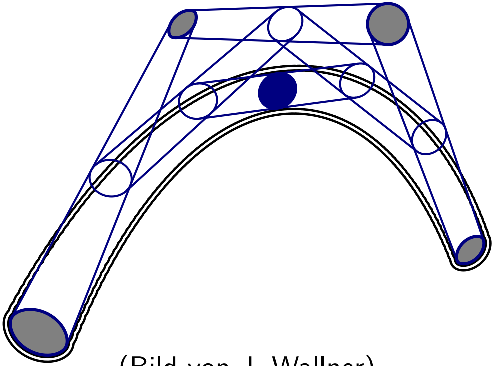
Institut für Technische Mathematik,
Geometrie und Bauinformatik
Universität Innsbruck

Mathematik 2005, Klagenfurt

# Motivation

Geometrische Operationen mit Mengen, “worst case tolerancing”

Rechnen mit »unscharfen Zahlen«

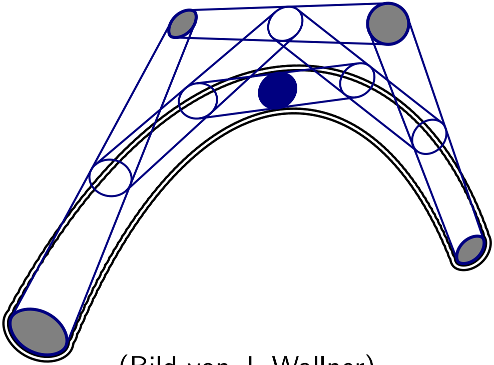


(Bild von J. Wallner)

# Motivation

Gegeben sei eine Operation $R$ für Mengen von geometrischen Objekten.

Wie kann man $R$ auf »Zufallsvariablen« erweitern?

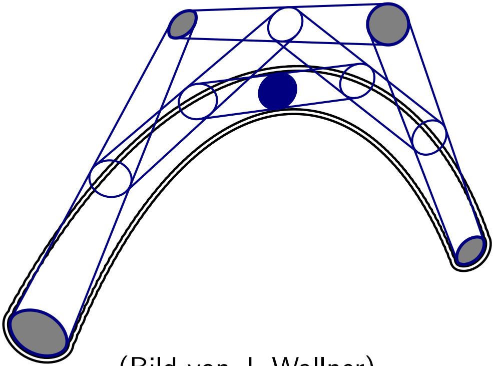


(Bild von J. Wallner)

# Motivation

## Herausforderungen

- redundante Objektkoordinaten
- Abhängigkeit der geometrischen Objekte
- Erreichen von geometrische Invarianz



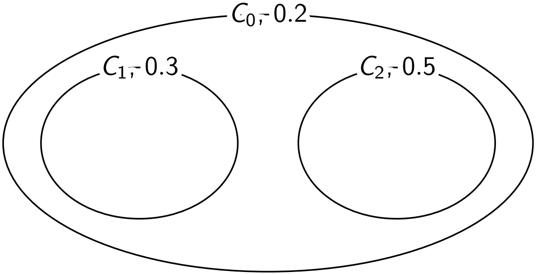
(Bild von J. Wallner)

# Inhalt

# Zufallsmengen (random sets, thickets)

### Definition

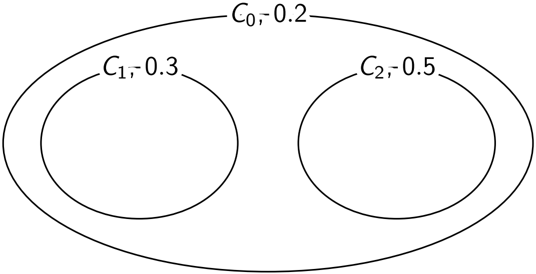
**Zufallsmenge:** $Z = \{(C_i, p_i) \mid i = 0, \ldots, n\}$, wobei $C_i \subset \mathbb{R}^d$ konvex, $p_i \geq 0$, $\sum p_i = 1$.



# Zufallsmengen (random sets, thickets)

$$\underline{p}(X) = \sum_{C_i \subset X} p_i$$ belief measure (»untere Wahrscheinlichkeit«)

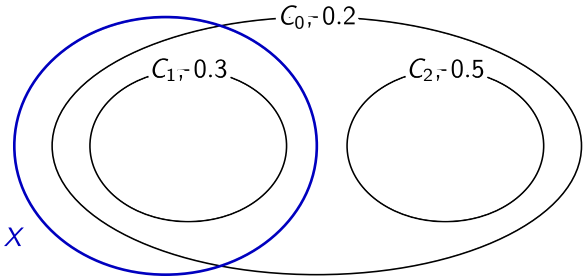
$$\overline{p}(X) = \sum_{C_i \cap X \neq \varnothing} p_i$$ plausibility measure (»obere Wahrscheinlichkeit«)



# Zufallsmengen (random sets, thickets)

$$\underline{p}(X) = \sum_{C_i \subset X} p_i$$ belief measure (»untere Wahrscheinlichkeit«)

$$\overline{p}(X) = \sum_{C_i \cap X \neq \varnothing} p_i$$ plausibility measure (»obere Wahrscheinlichkeit«)



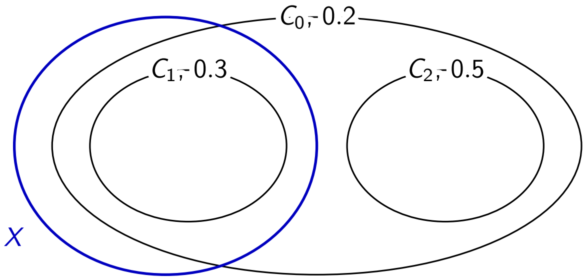

$$\underline{p}(X) = 0.3, \quad \overline{p}(X) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

# Zufallsmengen (random sets, thickets)

## Definition

Die Zufallsvariable $x$ wird von der Zufallsmenge $Z$ repräsentiert, wenn für alle $X$ aus der Borel-Algebra über $\mathbb{R}^d$ gilt:

$$\underline{p}(X) \leq p(x \in X) \leq \overline{p}(X).$$




$$\underline{p}(X) = 0.3, \quad \overline{p}(X) = 0.2 + 0.3 = 0.5$$

# Distribution-Envelope Computation (DEnv)

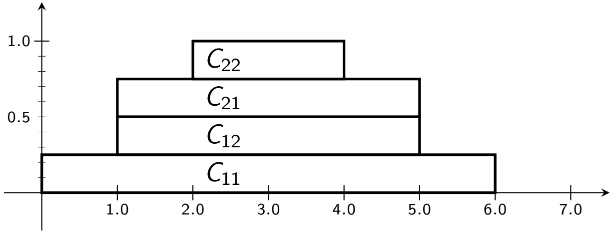
Man berechne $Z = Z' + Z'' = \{(C_i, p_i)\}$ wobei

$$Z' = \{([0,3]; 0.4), ([1,2]; 0.6)\}, \quad Z'' = \{([0,3]; 0.8), ([1,2]; 0.2)\}.$$

# Distribution-Envelope Computation (DEnv)

Man berechne $Z = Z' + Z'' = \{(C_i, p_i)\}$ wobei

$$Z' = \{([0,3]; 0.4), ([1,2]; 0.6)\}, \quad Z'' = \{([0,3]; 0.8), ([1,2]; 0.2)\}.$$



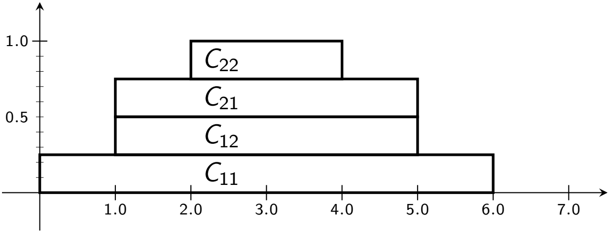

## Intervallarithmetik

$$C_{11} = [0,3] + [0,3] = [0,6], \quad C_{12} = [0,3] + [1,2] = [1,5],$$
$$C_{21} = [1,2] + [0,3] = [1,5], \quad C_{22} = [1,2] + [1,2] = [2,4].$$

# Distribution-Envelope Computation (DEnv)

Man berechne $Z = Z' + Z'' = \{(C_i, p_i)\}$ wobei

$$Z' = \{([0,3]; 0.4), ([1,2]; 0.6)\}, \quad Z'' = \{([0,3]; 0.8), ([1,2]; 0.2)\}.$$



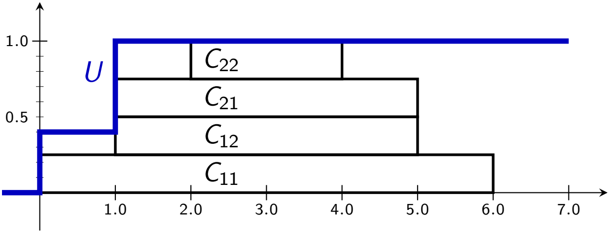

## Notwendige Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} p_{11} + p_{12} &= p'_1 = 0.4 & p_{21} + p_{22} &= p'_2 = 0.8 \\ p_{11} + p_{21} &= p''_1 = 0.6 & p_{12} + p_{22} &= p''_2 = 0.2 \end{aligned} \qquad \text{(NB)}$$

# Distribution-Envelope Computation (DEnv)

Man berechne $Z = Z' + Z'' = \{(C_i, p_i)\}$ wobei

$$Z' = \{([0,3]; 0.4), ([1,2]; 0.6)\}, \quad Z'' = \{([0,3]; 0.8), ([1,2]; 0.2)\}.$$

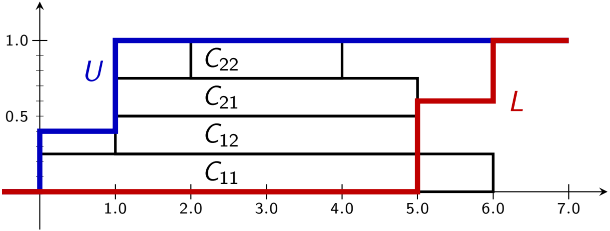



$$U(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ \max\{p_{11} \mid (\mathrm{NB})\} = 0.4 & 0 \leq x < 1, \\ \max\{p_{11} + p_{12} + p_{21} \mid (\mathrm{NB})\} = 1 & 1 \leq x < 2, \\ \max\{p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} \mid (\mathrm{NB})\} = 1 & 2 \leq x. \end{cases}$$

# Distribution-Envelope Computation (DEnv)

Man berechne $Z = Z' + Z'' = \{(C_i, p_i)\}$ wobei

$$Z' = \{([0,3];0.4),([1,2];0.6)\}, \quad Z'' = \{([0,3];0.8),([1,2];0.2)\}.$$

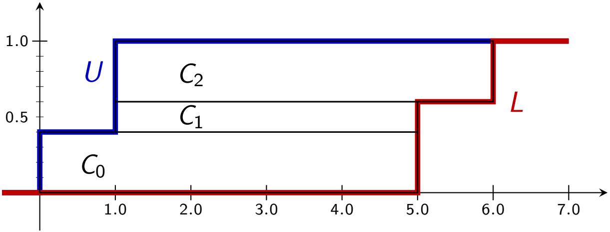



$$L(x) = \begin{cases} 0 & x < 4, \\ \min\{p_{22} \mid (\text{NB})\} = 0 & 4 \le x < 5, \\ \min\{p_{22} + p_{21} + p_{12} \mid (\text{NB})\} = 0.6 & 5 \le x < 6, \\ \min\{p_{22} + p_{21} + p_{12} + p_{11} \mid (\text{NB})\} = 1 & 6 \le x. \end{cases}$$

# Distribution-Envelope Computation (DEnv)

Man berechne $Z = Z' + Z'' = \{(C_i, p_i)\}$ wobei

$$Z' = \{([0,3]; 0.4), ([1,2]; 0.6)\}, \quad Z'' = \{([0,3]; 0.8), ([1,2]; 0.2)\}.$$




## Zerlegung in Zufallsmenge

$$Z = \{([0,5]; 0.4),\ ([1,5]; 0.2),\ ([1,6]; 0.4)\}$$

# Eigenschaften des DEnv-Algorithmus

- keine Annahme an Abhängigkeit der Eingangsdaten
- erweiterbar auf Operationen mit mehr Argumenten
- Lösung endlich vieler »einfacher« Optimierungsaufgaben (Linear Programming)

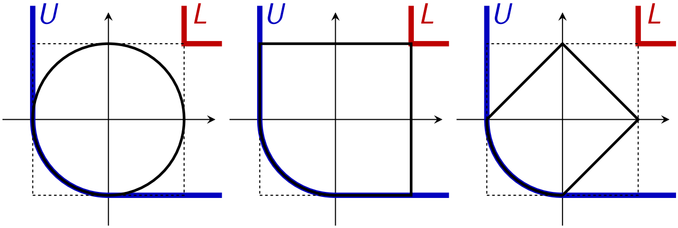
D. Berleant, C. Goodman-Strauss, *Bounding the result of arithmetic operations on random variables of unknown dependency using intervals*, Reliab. Comput. **4** (1998), no. 2, 147–165.

D. Berleant, J. Zhang, *Using Pearson correlation to improve envelopes around the distribution of functions*, Reliab. Comput. **10** (2004), no. 2, 139–161.

H. A. Regan, S. Ferson, D. Berleant, *Equivalence of methods for uncertainty propagation of real-valued random variables*, Internat. J. Approx. Reason. **36** (2004), 1–30.

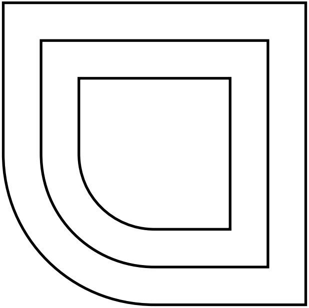
# Probleme im Mehrdimensionalen

- Informationsverlust durch Verwendung der multivariaten Verteilungsfunktion $V(x) = p(\{y \mid y_i \leq x_i\})$.
- Abhängigkeit vom Koordinatensystem



# Probleme im Mehrdimensionalen

- Informationsverlust durch Verwendung der multivariaten Verteilungsfunktion $V(x) = p(\{y \mid y_i \leq x_i\})$.
- Abhängigkeit vom Koordinatensystem



# Konsonante Zufallsmengen

### Definition

Eine Zufallsmenge $Z = \{(C_i, p_i)\}$ heißt konsonant, wenn bei geeigneter Indizierung $C_i \subset C_{i+1}$ gilt.

### Bemerkung

Jede Zufallsmenge kann in eine konsonante Zufallsmenge umgewandelt werden (im Allgemeinen unter Informationsverlust).

### Definition

$Z$ heißt Durchschnitt der Zufallsmengen $Z'$ und $Z''$ wenn $Z$ genau die Zufallsvariablen repräsentiert, die von $Z'$ und $Z''$ repräsentiert werden.

# Durchschnitt von Zufallsmengen

**Satz (Wallner, Sch. 2005)**

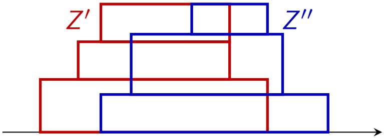
*Der Schnitt konsonanter Zufallsmengen $Z'$, $Z''$ existiert und kann »einfach« ermittelt werden.*

# Durchschnitt von Zufallsmengen

## Satz (Wallner, Sch. 2005)

*Der Schnitt konsonanter Zufallsmengen $Z'$, $Z''$ existiert und kann »einfach« ermittelt werden.*

## Schnittalgorithmus

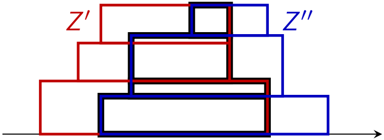


# Durchschnitt von Zufallsmengen

## Satz (Wallner, Sch. 2005)

*Der Schnitt konsonanter Zufallsmengen $Z'$, $Z''$ existiert und kann »einfach« ermittelt werden.*

## Schnittalgorithmus



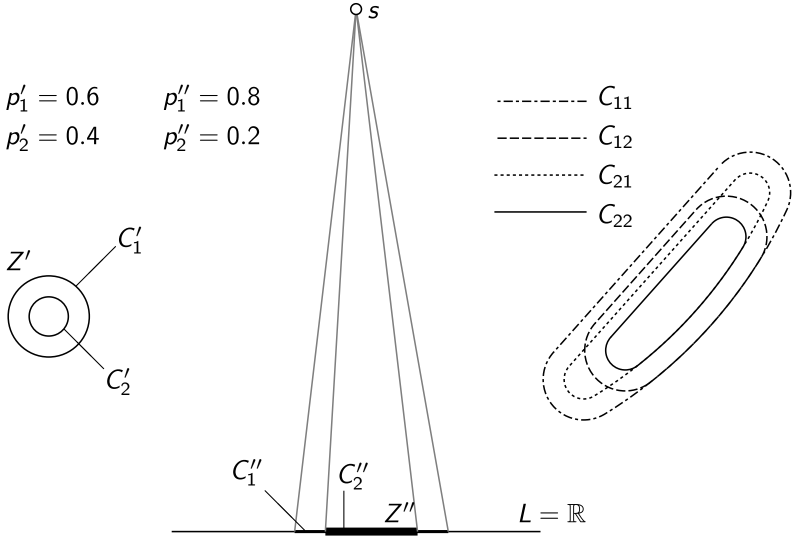
# Multivariate DEnv-Methode mit Durchschnitt

Gegeben: Eine geometrische Operation $R$, definiert für $n$-Tupel konvexer Mengen.

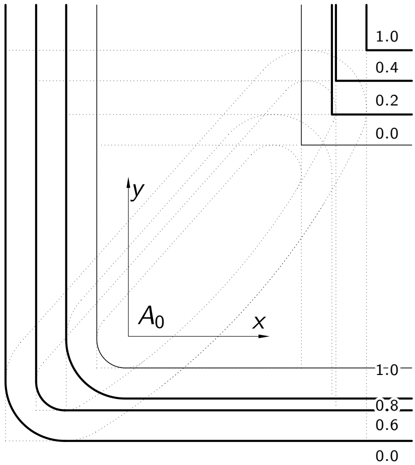
Gesucht: Erweiterung von $R$ auf $n$-Tupel von Zufallsmengen $(Z_1, \ldots, Z_n)$.

1. Wähle eine Menge verschieden orientierter Koordinatensysteme $A_i$ in $\mathbb{R}^d$.
2. Berechne mittels der gewöhnlichen DEnv-Methode das Resultat $Z_i$ von $R$ bezüglich $A_i$.
3. Wandle $Z_i$ in eine konsonante Zufallsmenge $K_i$ um.
4. Das Endergebnis ist $R(Z_1, \ldots, Z_n) = \bigcap K_i$.

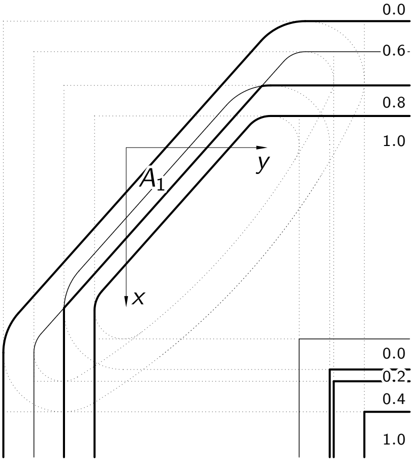
# Spiegelung eines Punktes an einer Geraden



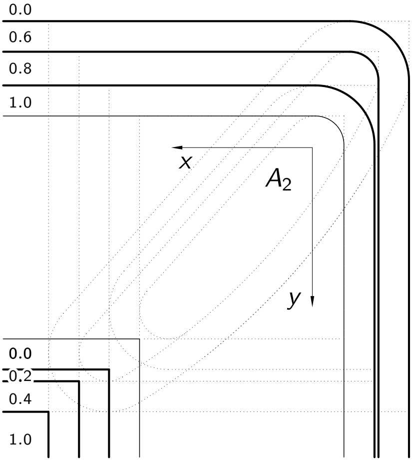
# Spiegelung eines Punktes an einer Geraden



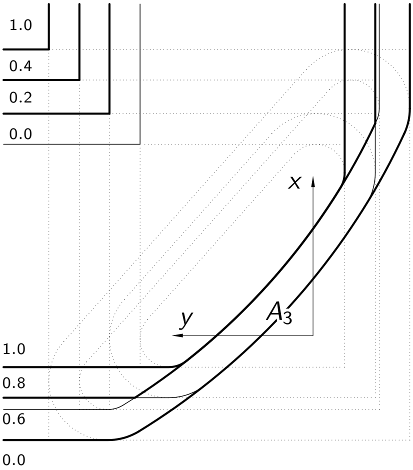
# Spiegelung eines Punktes an einer Geraden



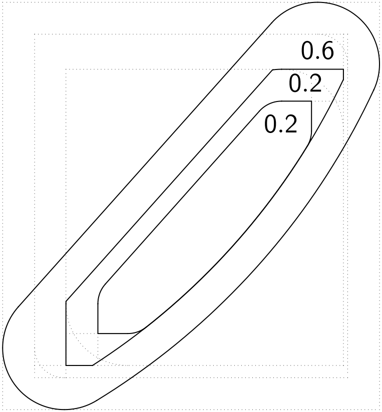
# Spiegelung eines Punktes an einer Geraden

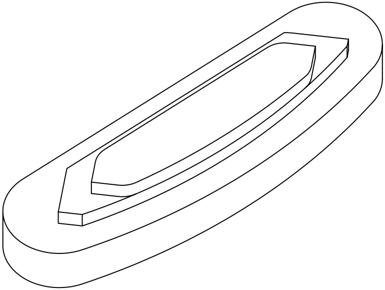


# Spiegelung eines Punktes an einer Geraden



# Spiegelung eines Punktes an einer Geraden



# Zusammenfassung

Jede geometrische Operation für konvexe Mengen kann auf Zufallsmengen erweitert werden:

- keine Annahme an Abhängigkeit der Eingangsdaten
- Lösung endlich vieler »einfacher« Optimierungsaufgaben (Linear Programming)
- »Annäherung« an geometrische Invarianz
- unter gewissen Voraussetzungen »einigermaßen« informationserhaltend

Unterstützt vom FWF Projekt Nr. P15911 (Geometrische Mengen-Operationen und Toleranzanalyse im CAD).

H.-P. Schröcker, J. Wallner: *Geometric Constructions with Discretized Random Variables*, Reliab. Comput. (zur Veröffentlichung angenommen).