

# Das Erzeugnis dreier projektiv gekoppelter Kegelschnitte

Hans-Peter Schröcker

## 1 Grundlagen

Wir werden in dieser Arbeit projektiv gekoppelte Kegelschnitte im reellen projektiven Dreiraum  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$ , den wir fallweise komplex erweitern, untersuchen. Bezüglich eines projektiven Koordinatensystems gestattet ein regulärer Kegelschnitt  $k \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  eine rationale Parameterdarstellung

$$k: X(s) \hat{=} \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{x}_1 + s^2\mathbf{x}_2, \quad s \in \overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}. \quad (1)$$

Dabei sind  $\mathbf{x}_0$ ,  $\mathbf{x}_1$  und  $\mathbf{x}_2$  unabhängige, reelle, vierdimensionale Vektoren. Die geometrische Bedeutung der von ihnen dargestellten Punkte kann Abbildung 1 entnommen werden:  $X_0$  und  $X_2$  sind die zu  $s = 0$  bzw.  $s = \infty$  gehörenden Kurvenpunkte auf  $k$ ,  $X_1$  ist der Pol von  $X_0X_2$  bezüglich  $k$ .

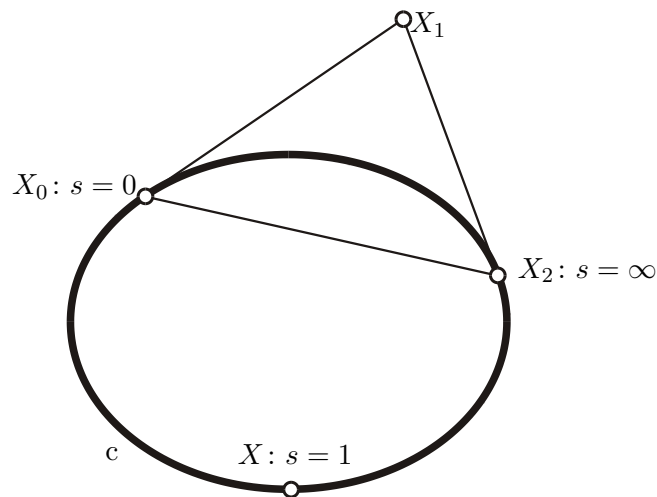


Abbildung 1: Rationale Parametrisierung eines Kegelschnitts.

Die Parameterdarstellung (1) ist nicht eindeutig bestimmt. Man erhält alle rationalen Darstellungen von  $k$ , wenn man auf die Vektorfunktion  $\mathbf{x}(x)$  eine linear-rationale

Parametertransformation (Möbius-Transformation)

$$\mu: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, \quad s \mapsto \frac{as + b}{cs + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (2)$$

angewendet und anschließend mit  $(cs + d)^2$  multipliziert, um die Koordinatenfunktionen wieder polynomial zu machen. Durch eine Möbius-Transformation  $\mu$  kann man drei beliebigen Punkten  $X_0^*$ ,  $X_1^*$  und  $x_2^*$  von  $k$  drei beliebige Parameterwerte  $s_0$ ,  $s_1$  und  $s_2$  zuordnen. Danach ist  $\mu$  eindeutig festgelegt.

Nun wählen wir zwei weitere Kegelschnitte  $l, m \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  und parametrisieren sie gemäß

$$\begin{aligned} l \dots Y(s) &\hat{=} \mathbf{y}(s) = \mathbf{y}_0 + s\mathbf{y}_1 + s^2\mathbf{y}_2, \\ m \dots Z(s) &\hat{=} \mathbf{z}(s) = \mathbf{z}_0 + s\mathbf{z}_1 + s^2\mathbf{z}_2. \end{aligned} \quad (3)$$

Durch gleiche Parameterwerte  $s$  wird eine projektive Kopplung zwischen den drei Kegelschnitten  $k$ ,  $l$  und  $m$  hergestellt. Umgekehrt kann auch jede projektive Kopplung durch gleiche Parameterwerte einer rationalen Parameterdarstellung erzeugt werden.

Ein Tripel  $\{X(s), Y(s), Z(s)\}$  von Punkten, die sich in der projektiven Kopplung entsprechen, spannt im Allgemeinen eine Ebene auf. Mit  $\mathbb{E}$  bezeichnen wir die Menge dieser Ebenen, also

$$\mathbb{E} := \{\varepsilon(s) = [X(s), Y(s), Z(s)] \mid s \in \overline{\mathbb{R}}, \dim \varepsilon(s) = 2\}. \quad (4)$$

Im Folgenden werden wir  $\mathbb{E}$  als das *Erzeugnis* der drei projektiv gekoppelten Kegelschnitte  $k$ ,  $l$  und  $m$  ansprechen. Dabei wollen wir den Fall, dass alle Tripel entsprechender Punkte kollinear liegen, genauso von unseren Betrachtungen ausschließen wie den Fall einer konstanten Ebene  $\varepsilon(s)$ , der eintritt, wenn  $k$ ,  $l$  und  $m$  eine gemeinsame Trägerebene  $\varepsilon_0$  besitzen.  $\mathbb{E}$  enthält also unendlich viele Ebenen.

Um eine Parameterdarstellung von  $\mathbb{E}$  bequem anschreiben zu können, bedienen wir uns einer Symbolik, wie sie auch in [4] verwendet wird. Sind  $\mathbf{a}_i = (a_{i0}, \dots, a_{i3})^T$  ( $i = 0, 1, 2$ ) drei vierdimensionale Spaltenvektoren und bezeichnet  $\Delta_{ijk}$  die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} a_{0i} & a_{1i} & a_{2i} \\ a_{0j} & a_{1j} & a_{2j} \\ a_{0k} & a_{1k} & a_{2k} \end{pmatrix},$$

so definieren wir das *Dreivektorsymbol*  $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$  als den vierdimensionalen Zeilenvektor  $(\Delta_{123}, -\Delta_{023}, \Delta_{013}, -\Delta_{012})$ . Es stellt also die Ebene, die von Punkten  $A_i \hat{=} \mathbf{a}_i$  aufgespannt wird, dar. Genau dann, wenn  $A_0$ ,  $A_1$  und  $A_2$  kollinear liegen, verschwindet das Dreivektorsymbol.

Der Darstellungsvektor  $\mathbf{u}(s)$  von  $\varepsilon(s) \in \mathbb{E}$  kann nun notiert werden als

$$\mathbf{u}(s) = \sum_{n=0}^6 s^n \mathbf{c}_n, \quad \text{wobei} \quad \mathbf{c}_n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \in \{0,1,2\}}} (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j, \mathbf{z}_k). \quad (5)$$

Es handelt sich bei  $\mathbb{E}$  also im Allgemeinen um eine *rationale Torse der Klasse*  $\Gamma = 6$ . Selbstverständlich kann  $\Gamma$  aber auch geringere Werte annehmen. Wir wollen im Folgenden genaue Algebraische und geometrische Bedingungen für die Verringerung der Klassenzahl von  $\mathbb{E}$  angeben. Prinzipiell gibt es dazu zwei Möglichkeiten:

1. Die Torse  $\mathbb{E}$  wird mehrfach durchlaufen.
2. Es gibt Nullstellen der Vektorfunktion  $\mathbf{u}(s)$ .

Im ersten Fall ist zu bedenken, dass  $\mathbb{E}$  höchstens zweimal durchlaufen werden kann, da Kegelschnitte ja Kurven zweiter Ordnung sind. Ist dies der Fall, so ist  $\mathbb{E}$  gemeinsame Doppeltorse der Regelflächen

$$\begin{aligned} \mathcal{K} \dots K(s, t) &\hat{=} \mathbf{y}(s) + t\mathbf{z}(s), \\ \mathcal{L} \dots L(s, t) &\hat{=} \mathbf{x}(s) + t\mathbf{z}(s), \\ \mathcal{M} \dots M(s, t) &\hat{=} \mathbf{x}(s) + t\mathbf{y}(s), \end{aligned} \tag{6}$$

die von je zweien der projektiv gekoppelten Kegelschnitte erzeugt werden. Es handelt sich bei  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  um Regelflächen vierten, dritten oder zweiten Grades. Wird  $\mathbb{E}$  zweifach durchlaufen, so sind sie nicht von viertem Grad. Sie müssten dann nämlich zusammenfallen, da sie in der Achsenkongruenz ihrer gemeinsamen Doppeltorse  $\mathbb{E}$  liegen und paarweise einen Kegelschnitt gemeinsam haben. Sind  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  von zweitem Grad, so kann es sich nur um Kegel zweiter Klasse mit kollinearen Scheiteln handeln. Dies führt auf ein quadratisch parametrisiertes Ebenenbüschel  $\mathbb{E}$ , das wir auch erhalten, wenn wenigstens eine der Regelflächen von drittem Grad ist. Es gilt also

*$\mathbb{E}$  kann höchstens zweifach durchlaufen werden. Es handelt sich dann um ein quadratisch parametrisiertes Ebenenbüschel.*

Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, wollen wir dies im weiteren Text allerdings nicht betrachten.

Die zweite Möglichkeit zur Verringerung der Klasse von  $\mathbb{E}$  besteht im Auftreten von Nullstellen von  $\mathbf{u}(s)$ . Verschwindet der Vektor  $\mathbf{u}(s)$  an der Stelle  $s = s_0$ , so kann er ohne Zerstörung des polynomialen Charakters durch  $s - s_0$  gekürzt werden. Jede Nullstelle von  $\mathbf{u}(s)$  reduziert also die Klasse von  $\mathbb{E}$  um Eins. Natürlich haben wir hier Nullstellen über  $\mathbb{C} \cup \infty$  mitsamt ihrer algebraischen Vielfachheit zu berücksichtigen.

Durch eine Parametertransformation der Gestalt (2) können wir stets erreichen, dass die betrachtete Nullstelle zum Parameterwert  $s_0 = 0$  gehört. Es genügt also, die Aussage

$(N_k)$ : »Null ist eine  $k$ -fache Nullstelle von  $\mathbf{u}(s)$ .«

für  $k = 1, \dots, 5$  zu betrachten.  $(N_k)$  nennen wir die  $k$ -te Nullbedingung. Ihrer Untersuchung ist der nächste Abschnitt gewidmet.

## 2 Die Nullbedingungen

Wir wollen nun die Nullbedingungen in algebraischer und geometrischer Hinsicht interpretieren. Da die auftretenden Rechnungen zwar nicht schwierig, aber langwierig sind, werden wir sie hier nicht angeben. Eine detaillierte Darstellung ist in [24] zu finden.

$(N_k)$  ist offenbar äquivalent mit  $\mathbf{c}_0 = \cdots = c_k = \mathbf{o}$ . Mit den Rechenregeln für das Dreivektorsymbol kann man diese Bedingungen umformen. Fallen die Punkte  $X_0, Y_0$  und  $Z_0$  nicht zusammen, gilt also ohne Einschränkung  $X_0 \neq Y_0$ , so ist  $(N_k)$  äquivalent zur Konjunktion der ersten  $k$  Aussagen der folgenden Liste:

$$\begin{aligned}
&\exists a_0, b_0 \in \mathbb{R}: \mathbf{z}_0 = a_0 \mathbf{x}_0 + b_0 \mathbf{y}_0 \\
&\exists a_1, b_1 \in \mathbb{R}: \mathbf{z}_1 = a_1 \mathbf{x}_0 + b_1 \mathbf{y}_0 + a_0 \mathbf{x}_1 + b_0 \mathbf{y}_1 \\
&\exists a_2, b_2 \in \mathbb{R}: \mathbf{z}_2 = a_2 \mathbf{x}_0 + b_2 \mathbf{y}_0 + a_1 \mathbf{x}_1 + b_1 \mathbf{y}_1 + a_0 \mathbf{x}_2 + b_0 \mathbf{y}_2 \\
&\exists a_3, b_3 \in \mathbb{R}: \mathbf{o} = a_3 \mathbf{x}_0 + b_3 \mathbf{y}_0 + a_2 \mathbf{x}_1 + b_2 \mathbf{y}_1 + a_1 \mathbf{x}_2 + b_1 \mathbf{y}_2 \\
&\exists a_4, b_4 \in \mathbb{R}: \mathbf{o} = a_4 \mathbf{x}_0 + b_4 \mathbf{y}_0 + a_3 \mathbf{x}_1 + b_3 \mathbf{y}_1 + a_2 \mathbf{x}_2 + b_2 \mathbf{y}_2
\end{aligned} \tag{7}$$

Mit Hilfe dieser Liste lassen sich nun wichtige Ergebnisse auf rechnerischem Weg herleiten. Wir setzen dazu voraus, dass die Punkte  $X_0, X_1, X_2, Y_0$  und  $Y_1$  allgemeine Lage besitzen und beginnen mit einer geometrischen Interpretation der ersten drei Nullbedingungen:

**Satz 1.** *Sind  $X_0, Y_0$  und  $Z_0$  paarweise verschieden, so gilt:*

- $(N_1)$  ist äquivalent damit, dass die Regelflächen  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  eine gemeinsame, zum Wert  $s = 0$  gehörende Erzeugende  $e_0$  besitzen.
- $(N_2)$  ist äquivalent damit, dass sich  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$ , längs  $e_0$  berühren.
- $(N_3)$  ist äquivalent damit, dass  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  in  $e_0$  dieselbe Schmiegequadratik besitzen.

*Skizze.* Zwei der Regelflächen besitzen genau dann an der Stelle  $s = 0$  eine gemeinsame Erzeugende, wenn die Bildkurven auf der Plücker-Quadric  $\Omega$  für  $s = 0$  denselben Punkt liefern. Sie berühren bzw. oskulieren sich längs dieser Erzeugenden, wenn sich ihre Bildkurven im zu  $s = 0$  gehörenden Punkt berühren bzw. oskulieren. Es seien  $\mathbf{m}(s)$  und  $\mathbf{l}(s)$  Parameterdarstellungen von  $\mathcal{M}$  bzw.  $\mathcal{L}$  als Kurven auf  $\Omega$ . Setzen wir eine  $(k+1)$ -punktige Berührung längs der zu  $s = 0$  gehörenden Erzeugenden voraus, so muss es nach [4] eine Parametertransformation  $s = s(s^*)$  und eine Umnormungsfunktion  $\varrho = \varrho(s^*)$  geben, so dass die ersten  $k$  Ableitungsvektoren der Funktionen  $\mathbf{m}(s)$  und  $\mathbf{l}^*(s^*) := \varrho(s^*) \mathbf{l}(s(s^*))$  an der Stelle  $s = 0$  bzw.  $s^* = s^{-1}(0)$  übereinstimmen ( $k = 0, 1, 2$ ). Zum Beweis des Satzes benötigen wir nur die ersten beiden Ableitungen

$$\dot{\mathbf{l}}^* = \dot{\varrho} \mathbf{l} + \varrho \dot{s} \mathbf{l}_s \quad \text{und} \quad \ddot{\mathbf{l}}^* = \ddot{\varrho} \mathbf{l} + (2\dot{\varrho} \dot{s} + \varrho \ddot{s}) \mathbf{l}_s + \varrho \dot{s}^2 \mathbf{l}_{ss}. \tag{8}$$

Der Punkt bedeutet dabei Ableitung nach  $s^*$  und die Ableitungsvektoren von  $\mathbf{l}$  sind an der Stelle  $s(s^*)$  auszuwerten. Ohne Einschränkung können wir außerdem im Folgenden

$s(0) = 0$  annehmen. Berechnet man nun mittels (1), (3) und (6) die Parameterdarstellungen für  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  auf der Plücker-Quadrik  $\Omega$  und vergleicht sie mit (8), so erhält man nach einiger Rechnung genau die Behauptung des Satzes.  $\square$

Fallen die Punkte  $X_0$ ,  $Y_0$ , und  $Z_0$  zusammen, so liest man aus (5) ab, dass  $(N_2)$  jedenfalls erfüllt ist. Wir erhalten dann die folgenden geometrischen Interpretationen für die restlichen Nullbedingungen:

**Satz 2.** *Gilt  $X_0 = Y_0 = Z_0$  und ist  $\mathbf{x}_0$  nicht linear abhängig von  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1$  und  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{z}_1$ , so ist  $(N_2)$  jedenfalls erfüllt,  $(N_3)$  ist äquivalent damit, dass  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  eine gemeinsame, zum Wert  $s = 0$  gehörende Erzeugende  $e_0$  besitzen,  $(N_4)$  ist äquivalent damit, dass sich diese Flächen längs  $e_0$  berühren,  $(N_5)$  damit, dass  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  in  $e_0$  dieselbe Schmiegequadrik besitzen.*

Für den verbleibenden Sonderfall gilt schließlich

**Satz 3.** *Ist  $\mathbf{x}_0$  linear abhängig von  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{y}_1$  und  $\mathbf{y}_1 - \mathbf{z}_1$ , so berühren sich  $k$ ,  $l$  und  $m$  im gemeinsamen Punkt  $X_0 = Y_0 = Z_0$ ,  $(N_4)$  ist dann jedenfalls erfüllt, während  $(N_5)$  genau dann eintritt, wenn  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  eine gemeinsame, zum Parameterwert  $s = 0$  gehörende Erzeugende besitzen.*

Sinnvollerweise verwendet man zum Beweis der Sätze 2 und 3 nicht die Parameterdarstellung (6) von  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$ . Man kann nämlich die Kegelschnitte  $m \dots \mathbf{z}(s)$  und  $l \dots \mathbf{y}(s)$  auf diesen Flächen ersetzen durch Flächenkegelschnitte, die  $X_0$  nicht enthalten. Dies ist deshalb stets möglich, weil  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  im betrachteten Fall von höchstens drittem Grad sind und demnach zumindest  $\infty^2$  Kegelschnitte tragen. Auf diese Weise vermeidet man Probleme, die durch die Singularität der Darstellungen (6) für  $s = 0$  auftreten, und kann direkt die beim Beweis von Satz 1 verwendeten Rechnungen benutzen.

Wir wollen nun als Letztes die geometrische Bedeutung der Nullbedingungen  $(N_4)$  und  $(N_5)$  im Fall nicht zusammenfallender Punkte  $X_0$ ,  $Y_0$  und  $Z_0$  angeben. Es handelt sich dabei nicht um das Zusammenfallen von vier oder fünf Erzeugenden an der Stelle  $s = 0$ .

**Satz 4.** *Sind die Punkte  $X_0$ ,  $Y_0$  und  $Z_0$  paarweise verschieden, so ist  $(N_4)$  äquivalent damit, dass  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  in  $e_0$  dieselbe Schmiegequadrik und dieselben Fleknodalpunkte besitzen.*

Der Beweis von Satz 4 verwendet eine Koordinatendarstellung der Vektoren  $\mathbf{x}_i$ ,  $\mathbf{y}_i$  und  $\mathbf{z}_i$ , sowie eine in [24] angegebene Rechnung zur Ermittlung der Fleknodalpunkte.

Weitere Rechnungen zeigen, dass im Fall  $(N_5)$  bereits die Regeläche  $\mathcal{M}$  (d. h. die Projektivität zwischen  $k$  und  $l$ ) nicht mehr beliebig gewählt werden darf. Es ist vielmehr eine gewisse algebraische Bedingung zu erfüllen, welche die geometrische Tatsache ausdrückt, dass  $\mathcal{M}$  eine Leitgerade  $x$  besitzt. Eine fünffache Nullstelle bedingt die Reduktion der Klasse  $\Gamma$  von  $\mathbb{E}$  auf Eins.  $\mathbb{E}$  ist also ein Ebenenbüschel und  $x$  ist seine Achse. Der Schnittpunkt  $F_1$  von  $x$  mit der zu  $s = 0$  gehörenden Erzeugenden  $e_0$  ist einer der beiden Fleknodalpunkte auf  $e_0$  und weitere Berechnungen zeigen

**Satz 5.** *Sind die Punkte  $X_0, Y_0$  und  $Z_0$  paarweise verschieden und gilt  $(N_4)$ , so ist  $(N_5)$  äquivalent damit, dass sich die Flächenkegelschnitte von  $\mathcal{K}, \mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  durch den auf der Büschelachse von  $\mathbb{E}$  liegenden Fleknodalpunkt  $F_1$  berühren.<sup>1</sup>*

Wir haben somit unter den eingangs gemachten Voraussetzungen (allgemeine Lage gewisser Grundpunkte der Kegelschnitte  $k$  und  $l$ ) für sämtliche Fälle von Nullstellen von  $u(s)$  geometrische Interpretationen angegeben. Die Untersuchungen waren deutlich komplizierter, als dies etwa im Fall der von drei projektiv gekoppelten Geraden erzeugten Ebenenmenge notwendig ist (vgl. [20, 21]). Dort macht es nämlich wenig Sinn, drei- oder mehrfache Nullstellen von  $u(s)$  zu studieren und auch das Zusammenfallen dreier entsprechender Punkte ist nicht von Interesse.

### 3 Ebene Doppelverhältnisscharen auf Kegelschnittsflächen

Wir werden nun spezielle Kurvensysteme auf Kegelschnittsflächen untersuchen, die mit den bisherigen Betrachtungen in engem Zusammenhang stehen. Unter einer Kegelschnittsfläche  $\Phi$  verstehen wir eine Fläche, die eine einparametrische Schar von Kegelschnitten trägt.  $\Phi$  kann stets durch einen projektiven Zwanglauf eines Kegelschnittes  $k$  erzeugt werden. Die Bahnkurven von  $k$  bilden in diesem Fall ein Kurvensystem  $\mathbb{D}$  auf  $\Phi$ , durch das je zwei Flächenkegelschnitte projektiv aufeinander bezogen sind. Ein solches System  $\mathbb{D}$  nennen wir *Doppelverhältnisschar* oder kürzer *DV-Schar*.

Doppelverhältnisscharen können in analoger Weise auch für Regelflächen definiert werden. Seit dem Erscheinen von [1] im Jahr 1953 wurden sie ausführlichen Untersuchungen unterzogen (vgl. das Literaturverzeichnis am Ende dieses Textes). Für DV-Scharen auf Kegelschnittsflächen liegen hingegen relativ wenige Ergebnisse vor ([2, 3, 6, 7]).

Wir wollen uns mit *ebenen* DV-Scharen beschäftigen. Die einzelnen Kurven der DV-Schar  $\mathbb{D}$  liegen also in Ebenen, die eine Torse  $\mathbb{E}$  (die *Trägertorse* von  $\mathbb{D}$ ) erfüllen.<sup>2</sup>  $\mathbb{E}$  ist von der Art, wie sie in Abschnitt 1 betrachtet wurde, denn sie wird durch die von den Scharkurven induzierte projektive Kopplung zwischen drei allgemeinen Flächenkegelschnitten erzeugt. Demnach können wir ebene DV-Scharen auf Kegelschnittsflächen nach der Klasse von  $\mathbb{E}$  einteilen in *sextisch* (allgemeiner Fall), *quintisch*, *quartisch*, *kubisch*, *konisch* und *schichtbildend*. Die letzten drei Bezeichnungen wurden auch von W. Degen in [8] zur Klassifikation der ebenen DV-Scharen auf Regelflächen verwendet. Die Bezeichnung schichtbildend geht bereits auf [1] zurück.

Bei der Untersuchung von Geraden bzw. Geradenmengen des  $\mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  deutet man diese häufig als Punkte bzw. Punktmengen auf der Plücker-Quadrik  $\Omega \subset \mathbb{P}_5(\mathbb{R})$ . Im vorigen Abschnitt haben auch wir diesen Standpunkt eingenommen. Die Kegelschnitte des  $\mathbb{P}^3$  können ebenfalls als Punkte einer gewissen Untermannigfaltigkeit  $M_8^4$  des reellen projektiven Raumes  $\mathbb{P}_9(\mathbb{R})$  betrachtet werden ([6]). Für die Untersuchung von DV-Scharen auf Kegelschnittsflächen hat dies jedoch gewisse Nachteile. Einerseits hat man stets eine Nebenbedingung (die Gleichung von  $M_8^4$ ) zu berücksichtigen, andererseits spiegelt sich die

<sup>1</sup>Da es in diesem Fall kein zusammenfallendes Tripel entsprechender Punkte geben kann, sind die Flächenkegelschnitte durch  $F_1$  eindeutig bestimmt.

<sup>2</sup>Wir setzen voraus, dass nicht alle Scharkurven auf Geraden oder in einer festen Ebene liegen.

projektive Kopplung der Flächenkegelschnitte nicht in ihrer Bildkurve im  $\mathbb{P}_9(\mathbb{R})$  wider.

Der Autor hat aus diesem Grund in [24] eine Deutung von Kegelschnitten als Punkte eines projektiven Raumes entwickelt, die beide Nachteile beseitigt und zum Studium ebener DV-Scharen auf Kegelschnittsflächen gut geeignet ist. Wir wollen sie an dieser Stelle präsentieren und merken nur noch an, dass sie nach naheliegender Verallgemeinerung auch zur Untersuchung nicht ebener DV-Scharen verwendet werden kann.

Wir gehen aus von einer durch drei projektiv gekoppelte Kegelschnitte erzeugten Torse  $\mathbb{E}$ , die wir gemäß

$$\mathbb{E} \dots \varepsilon(s) \hat{=} \mathbf{u}(s) = \sum_{i=0}^{\Gamma} s^i \mathbf{c}_i, \quad s \in \overline{\mathbb{R}} \quad (9)$$

parametrisieren. Für das Folgende setzen wir voraus, dass

1. die Vektorfunktion  $\mathbf{u}(s)$  bereits von überflüssigen Nullstellen befreit ist,
2.  $\mathbb{E}$  nicht mehrfach durchlaufen wird, also kein quadratisch parametrisiertes Ebenen- $\tilde{A}^{\frac{1}{2}}$ schel ist, und
3. kein Kegel dritter oder höhere Klasse ist.

Von diesen Voraussetzungen stellen nur die zweite und die dritte Einschränkungen dar. Die zugehörigen Sonderfälle bedürfen einer gesonderten Untersuchung.

Nun betrachten wir alle quadratischen Parameterdarstellungen von Kegelschnitten, Geraden oder Punkten, die zur Erzeugung von  $\mathbb{E}$  verwendet werden können, also die Menge

$$V_{\mathbb{E}} := \{\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{x}_1 + s^2\mathbf{x}_2 \mid \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^4, \mathbf{u}(s)\mathbf{x}(s) \equiv 0\}. \quad (10)$$

Dabei ist unter  $\mathbf{u}(s)\mathbf{x}(s)$  das gewöhnliche Matrizenprodukt des vierdimensionalen Spaltenvektors  $\mathbf{x}(s)$  und des vierdimensionalen Zeilenvektors  $\mathbf{u}(s)$  zu verstehen.  $V_{\mathbb{E}}$  ist ein reeller Vektorraum endlicher Dimension. Da es bei einer rationalen Parameterdarstellung auf skalare Vielfache nicht ankommt, gehen wir über zum projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  über  $V_{\mathbb{E}}$ . Die Punkte von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  sind Klassen proportionaler rationaler Parameterdarstellungen vom Grad  $\gamma \leq 2$ .

Man kann sich unter einem Punkt von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  auch einen mit einer rationalen Parametrisierung versehenen Kegelschnitt vorstellen, solange man nicht vergisst, dass unter Umständen Parametrisierungen von Geraden oder sogar einzelnen Punkten auftreten können. Geraden oder Punkte korrespondieren ihrerseits mit unendlich vielen Punkten aus  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$ .

Wir wollen die Punkte von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  in suggestiver Weise als *Erzeugungskegelschnitte* ansprechen. Die Geraden von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  nennen wir *Erzeugungsregelflächen*, da sie im Allgemeinen tatsächlich die Kegelschnitte auf einer Regelfläche bilden. Diese Regelflächen sind von der Art, wie es die Flächen  $\mathcal{K}$ ,  $\mathcal{L}$  und  $\mathcal{M}$  in Abschnitt 2 waren. Es sind aber auch zahlreiche Entartungsfälle denkbar. So besteht etwa die Möglichkeit, dass sämtliche Erzeugungskegelschnitte einer »Erzeugungsregelfläche« nur Parametrisierungen eines festen Punktes sind.

Zu bemerken ist noch, dass der Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  sowohl von der Torse  $\mathbb{E}$  als auch von der gewählten Parametrisierung (9) abhängt. Es lässt sich jedoch leicht zeigen, dass äquivalente rationale Parameterdarstellungen auf isomorphe projektive Räume führen. Aus diesem Grund ist auch die Schreibweise  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  (anstelle von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E},\mathbf{u}(s)}$  oder Ähnlichem) gerechtfertigt.

Man kann eine Basis des Vektorraumes  $V_{\mathbb{E}}$  und damit auch des projektiven Raumes  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  berechnen, indem man eine quadratische Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{x}_1 + s^2\mathbf{x}_2$  mit unbekanntem Vektoren  $\mathbf{x}_i$  ansetzt und die Bedingung

$$\mathbf{u}(s)\mathbf{x}(s) \equiv 0 \tag{11}$$

auswertet. Die linke Seite von (11) ist ein Polynom vom Grad  $\Gamma + 2$ . Die Forderung nach seinem identischen Verschwinden liefert insgesamt  $i\Gamma + 3$  lineare, homogene Gleichungen für die zwölf unbekanntem Koeffizienten der Vektoren  $\mathbf{x}_i$ . Die Dimension  $d$  von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  ist somit zumindest gleich  $8 - \Gamma$ . Man kann mit synthetischen Überlegungen, die an dieser Stelle nicht vorgeführt werden sollen, zeigen, dass unter den gegebenen Bedingungen auch die Ungleichung  $d \leq 8 - \Gamma$  gilt. Es gilt also

**Satz 6.** *Die Dimension  $d$  von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  und die Klasse  $\Gamma$  von  $\mathbb{E}$  stehen in der Beziehung  $d + \Gamma = 8$ .*

Eine Kurve  $\Phi_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  bestimmt eine Kegelschnittsfläche  $\Phi \subset \mathbb{P}_3(\mathbb{R})$  mit ebener DV-Schar  $\mathbb{D}$  und Trägertorse  $\mathbb{E}$ , sofern nicht alle Flächenkegelschnitte zu Geraden oder Punkten entarten. Umgekehrt gehört zu einer ebene DV-Schar mit Trägertorse  $\mathbb{E}$  auf einer Kegelschnittsfläche  $\Phi$  auch eine Kurve  $\Phi_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$ . Wir können daher neben der Klasse  $\Gamma$  von  $\mathbb{E}$  auch den Planarheitsgrad  $p$  von  $\Phi_{\mathbb{E}}$  als Kennzahl zur Einteilung der ebenen DV-Scharen auf Kegelschnittsflächen verwenden. Wegen  $p \leq d$  und Satz 6 erhalten wir somit 21 verschiedene Typen.<sup>3</sup>

Die Einteilung der Ebenen DV-Scharen nach dem Planarheitsgrad ist durchaus natürlich, lassen sich doch die Trägerflächen in einheitlicher Weise parametrisieren. Ist nämlich  $\{\mathbf{b}_i(s) \mid i = 0, \dots, p\}$  eine Basis der projektiven Hülle von  $\Phi_{\mathbb{E}}$ , so gestattet  $\Phi$  eine Parameterdarstellung der Art

$$\Phi \dots X(s) \hat{=} \mathbf{x}(s, t) = \sum_{i=0}^p \lambda_i(t)\mathbf{b}_i(s), \quad s \in \overline{\mathbb{R}}, t \in I \tag{12}$$

mit gewissen Funktionen  $\lambda_i(t)$ , die in einem Parameterintervall  $I$  definiert sind.

#### 4 Projektiv Äquivalente Scharkurven

Die Kurven  $\Phi_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  vom Planarheitsgrad  $p = 1$  (Gerade) lassen sich, wie bereits erwähnt, in den regulären Fällen als von zwei projektiv gekoppelten Kegelschnitten erzeugte Regelächen deuten. Aber auch die durch  $p = 2$  gekennzeichneten ebenen Kurven

---

<sup>3</sup>Zu jeder de, sechs möglichen Dimensionzahlen  $d \in \{2, \dots, 6\}$  von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  gibt es  $d - 1$  mögliche Planarheitsgrade, da die Kurven vom Planarheitsgrad  $p = 1$  ja nur auf Regelflächen führen. Insgesamt erhalten wir somit  $1 + \dots + 6 = 21$  Klassen.



besitzen eine interessante gemeinsame Eigenschaft, die wir nun darstellen wollen. Wir definieren für ein festes  $s_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  die Abbildung

$$\varkappa(s_0): \mathbb{P}_{\mathbb{E}} \setminus \ker(s_0) \rightarrow \mathbb{P}_3(\mathbb{R}), \quad \mathbf{x}(s) \mapsto \mathbf{x}(s_0). \quad (13)$$

$\varkappa(s_0)$  ist definiert für alle Punkte  $\mathbf{x}(s) \in \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  mit Ausnahme der Elemente von  $\ker(s_0) := \{\mathbf{x}(s) \in \mathbb{P}_{\mathbb{E}} \mid \mathbf{x}(s_0) = \mathbf{o}\}$ . Es ist leicht zu sehen, dass  $\varkappa(s_0)$  eine *kollineare Abbildung* ist. Die Kurve  $\Phi_{\mathbb{E}}$  wird unter  $\varkappa(s_0)$  auf die zu  $s = s_0$  so gehörende Scharkurve der DV-Schar auf  $\Phi$  abgebildet. Alle Scharkuren sind somit *kollinear zur festen Kurve  $\Phi_{\mathbb{E}}$* . Spannt  $\Phi_{\mathbb{E}}$  eine Ebene  $\varepsilon$  auf, so entsprechen sich die Kurven sogar in einer bijektiven kollinearen Abbildung (Kollineation) ihrer Trägerebenen. Mit anderen Worten: *Die Trägerebenen  $\varepsilon(s)$  der Kurven der DV-Schar sind durch die Flächenkegelschnitte projektiv aufeinander bezogen.*<sup>4</sup> Die Kurven einer ebenen DV-Schar mit dieser Eigenschaft werden *projektiv äquivalent* genannt. Diese Äquivalenz steht seit langem im Zentrum verschiedener Untersuchungen, die zu unserem Thema verwandt sind. Projektiv äquivalente, ebene DV-Scharen auf Regelflächen wurden etwa in [8] untersucht. In [17] gelingt es dem Autor, die projektiven Bewegungsvorgänge mit durchwegs ebenen, projektiv äquivalenten Bahnkurven zu charakterisieren: Sie können mittels einer kinematischen Abbildung auf die Ebenen eines projektiven Raumes abgebildet werden.<sup>5</sup> Auch für unser Untersuchungsgebiet gilt ein ähnliches Ergebnis:

**Satz 7.** *Die projektiv äquivalenten, ebenen DV-Scharen auf Kegelschnittsflächen gehören zu den ebenen Kurven des projektiven Raumes  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  und umgekehrt.*

*Skizze.* Wir haben nur mehr zu zeigen, dass es keine Kurven  $\Phi_{\mathbb{E}} \subset \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  vom Planaritätsgrad  $p \geq 3$  gibt, die zu projektiv äquivalenten DV-Scharen führen. Man kann sich überlegen, dass es reicht, sich auf den Fall  $p = 3$  zu beschränken. Wir betrachten also die Situation in dem von  $\Phi_{\mathbb{E}}$  aufgespannten Dreiraum  $\Pi$ . Da nach Voraussetzung sämtliche Scharkurven eben sind, schneidet (mit höchstens endlich vielen Ausnahmen, welche zu entarteten Scharkurven gehören) jeder Kernraum  $\ker(s_0)$  den Dreiraum  $\Pi$  in genau einem Punkt, dem Kernpunkt  $K(s_0)$ . Die Kurve  $k$  der Kernpunkte erweist sich als algebraisch. Es gibt daher eine feste Ebene  $\varphi \subset \Pi$ , welche nur endlich viele Kernpunkte enthält. Wir können daher, wieder mit endlich vielen Ausnahmen, jede kollineare Abbildung  $\varkappa(s_0)$  zerlegen in

1. eine Projektion aus  $K(s_0)$  in  $\varphi$  und
2. eine Kollineation von  $\varphi$  nach  $\varepsilon(s_0)$ .

Bereits die Projektionen  $c(s_0)$  von  $\Phi_{\mathbb{E}}$  aus  $K(s_0)$  müssen in geeigneter Weise projektiv äquivalent sein. Betrachten wir zwei feste Werte  $s_0$  und  $s_1$ , so wird die projektive Kopplung  $\varkappa_{01}$  durch die Strahlen des Büschels mit Scheitel  $Z = [K(s_0), K(s_1)] \cap \varphi$  in  $\varphi$  hergestellt (vgl. Abbildung 2). Es gibt nun nur zwei Möglichkeiten (vgl. [24]):

1.  $\varkappa_{01}$  ist eine perspektive Kollineation mit Zentrum  $Z$ .

<sup>4</sup>Ausnahmen sind nur die Scharkurven, die zu Geraden oder einzelnen Punkten entarten.

<sup>5</sup>Weitere Arbeiten zu verwandten Themen sind im Literaturverzeichnis am Ende des Textes angegeben.

2.  $c(s_0)$  und  $c(s_1)$  sind beides Kegelschnitte.

Wir werden beide Fälle auf einen Widerspruch führen:

Im ersten Fall gelingt dies sofort. Man kann  $\varkappa_{01}$  durch die Vorschrift  $K(s_0) \mapsto K(s_1)$  zu einer perspektiven Kollineation des Dreiraumes  $\Pi$  erweitern und erkennt, dass  $\Phi_{\mathbb{E}}$  in diesem Fall aus lauter Fixpunkten besteht.  $\Phi$  ist also eben, was der Annahme  $p \geq 3$  widerspricht.

Im zweiten Fall liegt  $\Phi$  auf unendlich vielen Kegeln zweiter Ordnung. Das ist nur möglich, wenn  $\Phi$  eben ist (Widerspruch!) oder mit der Kernpunktkurve  $k$  zusammenfällt und von dritter Ordnung ist. In diesem Fall entarten aber sämtliche Flächenkegelschnitte zu Geraden und wir haben es tatsächlich nicht mit einer Kegelschnittsfläche, sondern bloß mit einer Regelfläche  $\Phi$  zu tun.  $\square$

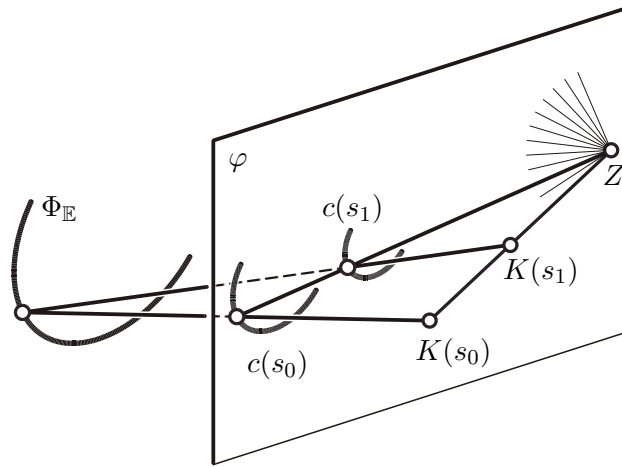


Abbildung 2: Erzeugung der projektiven Kopplung zwischen  $c(s_0)$  und  $c(s_1)$ .

## 5 Entartete Scharkurven und Beispiele

Als Letztes wollen wir uns kurz mit *entarteten Scharkurven* befassen. Grob gesprochen verstehen wir darunter eine Kurve der ebenen DV-Schar  $\mathbb{D}$  auf der Kegelschnittsfläche  $\Phi$ , die auf einer Geraden liegt oder gar zu einem Punkt entartet. Man kann den Begriff jedoch feiner fassen: Dazu gehen wir wiederum von einer rationalen Parametrisierung

$$\mathbb{E} \dots \varepsilon(s) \hat{=} \mathbf{u}(s) = \sum_{i=0}^{\Gamma} s^i \mathbf{c}_i, \quad s \in \overline{\mathbb{R}} \quad (14)$$

der Trägerebenen-torse  $\mathbb{E}$  von  $\mathbb{D}$  aus und betrachten den projektiven Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$ , wie er in Abschnitt 3 eingeführt wurde. Drei unabhängige Erzeugungskegelschnitte  $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(s)$  ( $i = 0, 1, 2$ ) von  $\mathbb{E}$  bestimmen gemäß

$$\tilde{\mathbf{u}}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2] := (\mathbf{b}_0(s), \mathbf{b}_1(s), \mathbf{b}_2(s)) \quad (15)$$

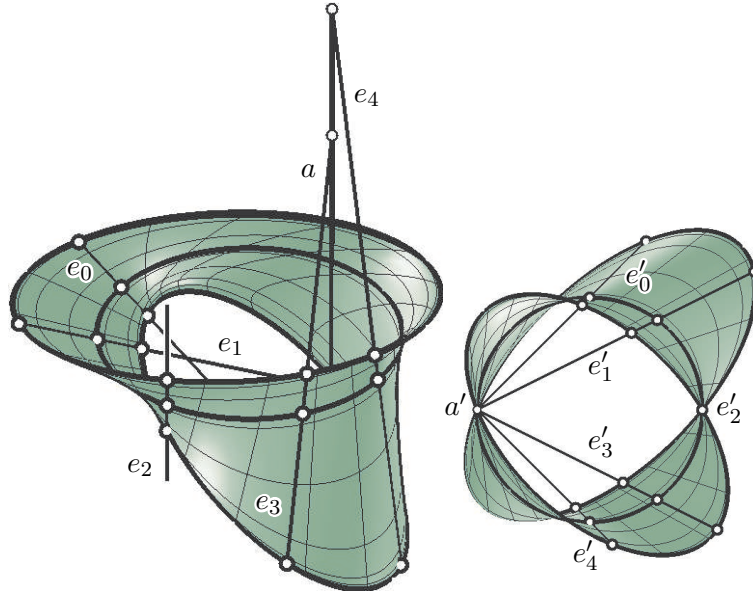


Abbildung 3: Eine Kegelschnittfläche  $\Phi$  mit schichtbildender DV-Schar  $\mathbb{D}$  vom Planaritätsgrad  $p = 2$ .  $\mathbb{D}$  enthält insgesamt fünf zu Geraden  $e_i$  entartete Scharkurven, welche die Achse  $a$  des Trägerebenenbüschels  $\mathbb{E}$  von  $\mathbb{D}$  treffen.  $a$  liegt ebenfalls auf der Fläche, gehört der DV-Schar aber nicht an.

eine vektorwertige Funktion  $\tilde{\mathbf{u}}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]: \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^4$ . Die Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen von  $\tilde{\mathbf{u}}[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$  hängt nur von den gewählten Erzeugungskegelschnitten  $\mathbf{b}_i(s)$  ab. Es kann aber sein, dass eine gewisse Nullstelle  $s_0$  der Vielfachheit  $\mu_0$  sogar noch unabhängig von der Wahl dieser Kegelschnitte ist. In diesem Fall wollen wir  $s_0$  als *feste Nullstelle der Vielfachheit*  $\mu_0$  bezeichnen. Die zugehörige Scharkurve von  $\mathbb{D}$  bezeichnen wir als  $\mu_0$ -fach entartet und von *geradlinigem* bzw. *punktförmigen Typus*, je nachdem, ob sie auf einer Geraden liegt oder zu einem einzigen Punkt entartet.

Eine einfache Rechnung zeigt nun, dass sämtliche Erzeugungskegelschnitte, welche eine gewisse entartete Scharkurve liefern können, einen Unterraum von  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  bilden. Weiters läßt sich zeigen, dass für eine Gerade  $g$  bzw. einen Punkt  $P$  die beiden Mengen

$$\begin{aligned} U_g^{s_0} &:= \{\mathbf{x}(s) \in \mathbb{P}_{\mathbb{E}} \mid X(s_0) \hat{=} \mathbf{x}(s_0) \in g\} \\ U_P^{s_0} &:= \{\mathbf{x}(s) \in \mathbb{P}_{\mathbb{E}} \mid X(s_0) \hat{=} X(s_0)\mathbf{x}(s_0) = P\} \end{aligned} \quad (16)$$

im Allgemeinen Unterräume der Dimension  $d - 2$  bzw.  $d - 3$  sind ( $d = \dim \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$ ). Genau in den Fällen  $g \subset \varepsilon(s_0)$  oder  $P \in \varepsilon(s_0)$  erhöhen sich diese Dimensionen auf  $d - 1$  bzw.  $d - 2$ . Es ist eine einfache Folgerung aus (7), dass nur solche Geraden bzw. Punkte als Träger entarteter Scharkurven in Frage kommen. Die einfach entarteten Scharkurven gehören somit zu gewissen Hyperebenen in  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$ , die zweifach entarteten Scharkurven von punktförmigem Typus zu Unterräumen der Dimension  $d - 2$ .

Mit Hilfe dieser Überlegungen sind wir nun imstande, Beispielflächen für alle betrachteten Typen zu produzieren. Im Wesentlichen gehen wir dabei immer nach dem selben

Schema vor. Wir wählen zunächst eine rationale Torse  $\mathbb{E}$  vom Grad  $\Gamma \leq 6$ , welche den zu Beginn von Kapitel 3 angegebenen Bedingungen genügt, und parametrisieren sie gemäß (14). Für die Parameterdarstellung eines allgemeinen Erzeugungskegelschnitts machen wir nun den Ansatz

$$k \dots X(s) \hat{=} \mathbf{x}(s) = \mathbf{x}_0 + s\mathbf{x}_1 + s^2\mathbf{x}_2. \quad (17)$$

Die Bedingung

$$\mathbf{u}(s)\mathbf{x}(s) \equiv 0 \quad (18)$$

liefert insgesamt  $\Gamma + 3$  lineare homogene Gleichungen für die zwölf unbekanntenen Koeffizienten der Parameterdarstellung (1) von  $k$ . Der zum Lösungsraum gehörende projektive Raum  $\mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  wird – nach Satz 6 – die Dimension  $d = 8 - \Gamma$  besitzen.

Nun wählen wir einen geeigneten Unterraum  $U \subset \mathbb{P}_{\mathbb{E}}$  der Dimension  $p$  und eine Basis  $(\mathbf{b}_0(s), \dots, \mathbf{b}_p(s))$  von  $U$ . Jede Kurve  $\Phi_{\mathbb{P}_{\mathbb{E}}} \subset U$  läßt sich mittels geeigneter Funktionen  $\lambda_0(t), \dots, \lambda_p(t)$  durch

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i(t)\mathbf{b}_i(s)$$

parametrisieren. Eine Parameterdarstellung der zugehörigen Kegelschnittsfläche  $\Phi$  erhält man, wenn man  $s$  nicht länger als Unbestimmte, sondern als Parameter betrachtet. Die Scharkurven und Flächenkegelschnitte bilden dabei das Netz der Parameterlinien. Erklärungen zu den in Abbildung 3, 4 und 5 dargestellten Flächen sind in den Bildunterschriften zu entnehmen.

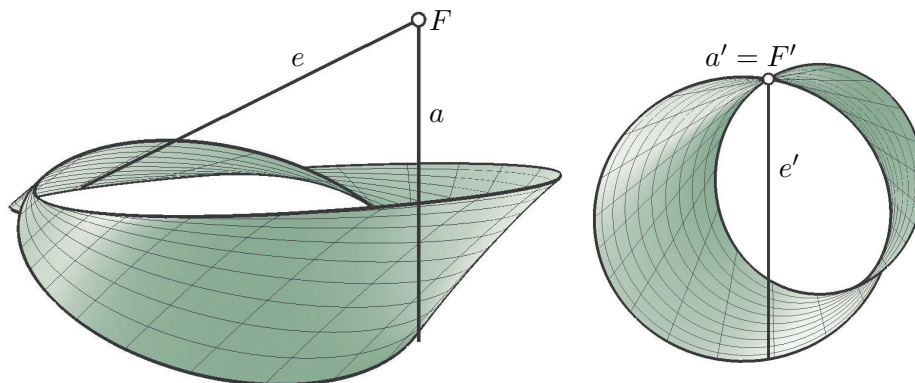


Abbildung 4: Kegelschnittsfläche mit ebener DV-Schar  $\mathbb{D}$  und fünffach entarteter Scharkurve.  $\mathbb{D}$  ist notwendigerweise schichtbildend. Die Achse  $a$  des Trägerebenenbüschels  $\mathbb{E}$  schneidet die einzige geradlinige Scharkurve  $e$  in einem Punkt  $F$ , der auf allen Erzeugungsregelflächen Fleknodalpunkt ist und in dem sich die Flächenkegelschnitte berühren.

## Literatur

- [1] BARNER, MARTIN: *Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen*. Math. Z., 62:50–93, 1953.

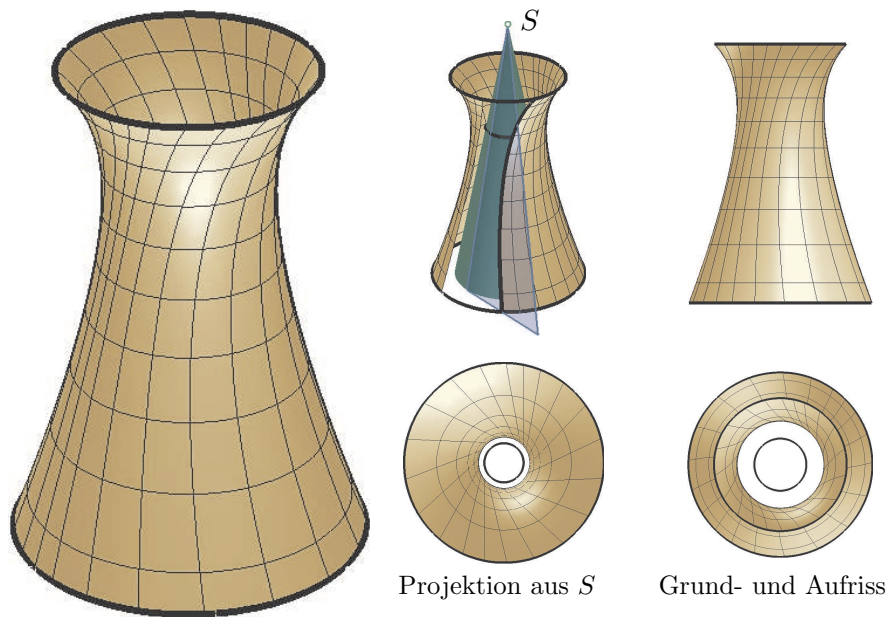


Abbildung 5: Auf jeder Drehfläche wird durch die Tangentialebenen eines koaxialen Drehkegels eine DV-Schar ausgeschnitten. In diesem Fall gibt es zwei zu Punkten entartete Scharkurven, nämlich die absoluten Kreispunkte der Grundrissebene.

- [2] BLUTEL, E. : *Recherches sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré.* Ann. sci. école norm. super., 7(3) :155–216, 1890.
- [3] BLUTEL, E. : *Sur les surfaces qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré.* Ann. Fac. Sci. Univ. de Toulouse, sciences mathématiques, 27 :201–240, 1935.
- [4] BOL, GERRIT : *Projektive Differentialgeometrie*, volume I. Vandenhoeck & Ruprecht, 1950.
- [5] BRAUNER, HEINRICH: *Die windschiefen Kegelschnittsflächen.* Math. Ann., 183:33–44, 1969.
- [6] DEGEN, WENDELIN: *Zur projektiven Differentialgeometrie der Flächen, die von einer einparametrischen Schar von Kegelschnitten erzeugt werden I.* Math. Ann., 155, 1964.
- [7] DEGEN, WENDELIN: *Zur projektiven Differentialgeometrie der Flächen, die von einer einparametrischen Schar von Kegelschnitten erzeugt werden II.* Math. Ann., 170, 1967.
- [8] DEGEN, WENDELIN: *Darbouxsche Doppelverhältnisscharen auf Regelflächen.* Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl., 198(4–7):159–169, 1989.

- [9] KARGER, ADOLF: *Darboux motions in  $E_n$* . Czechoslovak Math. J., 29(104):303–317, 1979.
- [10] KARGER, ADOLF: *Similarity motions in  $E_3$  with plane trajectories*. Apl. Mat., 26:194–201, 1981.
- [11] KARGER, ADOLF: *Affine darbox motions*. Czechoslovak Math. J., 35(110):355–372, 1985.
- [12] KARGER, ADOLF: *Affine space motions with only plane trajectories*. Comment. Math. Univ. Carl., 28:337–343, 1987.
- [13] KARGER, ADOLF: *Classification of projective space motions with only plane trajectories*. Apl. Mat., 34(2):133–145, 1989.
- [14] KARGEROVA, M.: *Projective plane motions with straight trajectories*. Mat. Metody Sots. Naukakh, 29:45–51, 1984.
- [15] MÜLLER, EMIL and JOSEF LEOPOLD KRAMES: *Konstruktive Behandlung der Regelflächen*, volume III of *Vorlesungen über Darstellende Geometrie*. Franz Deuticke, Leipzig, Wien, 1931.
- [16] POTTMANN, HELMUT and WOLFGANG RATH: *Eine affine kinematische Abbildung II*. Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet., 435:123–138, 1988.
- [17] RATH, WOLFGANG: *Eine affine kinematische Abbildung I*. Rad Jugoslav. Akad. Znan. Umjet., 435:111–122, 1988.
- [18] RATH, WOLFGANG: *Darboux motions in threedimensional projective space*. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl., 201(1–10), 1992.
- [19] RATH, WOLFGANG: *Matrix groups and kinematics in projective spaces*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 63, 1993.
- [20] REYE, T.: *Die Geometrie der Lage*, volume 1. Rümpler, Hannover, 1867.
- [21] REYE, T.: *Die Geometrie der Lage*, volume 2. Rümpler, Hannover, 1880.
- [22] RÖSCHEL, OTTO: *Räumliche Zwangsläufe mit einer zweiparametrischen Schar ebener Bahnkurven I, II*. Österr. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl., 193, 1984.
- [23] SCHRÖCKER, HANS-PETER: *The geometry of rational parameterized representations*. To appear in J. Geometry.
- [24] SCHRÖCKER, HANS-PETER: *Die von drei projektiv gekoppelten Kegelschnitten erzeugte Ebenenmenge*. Ph.D. Thesis, Technische Universität Graz, 2000.
- [25] SCHRÖCKER, HANS-PETER: *Generatrices of Rational Curves*. J. Geom., 73:134–147, 2002.

- [26] VOGLER, HANS: *Räumliche Zwangsläufe mit ebenen Bahnkurven*. Ber. Math.-Stat. Sect. Forschungszent. Graz, 162:1–17, 1981.
- [27] WRRESNIK, HELMUT: *Regelflächen mit ebenen Kongruenzscharen*. Ph.D. Thesis, Technische Universität Graz, 1988.