

# 5

## Durchdringung von Flächen

### 5.1 Konstruktion der Schnittkurve zweier Flächen

Gegeben seien zwei Flächen  $\Phi_1, \Phi_2$ . Die Menge der Punkte, die beiden Flächen angehört, wird ihre *Schnittkurve*  $c$  (*Durchdringungskurve*) genannt ( $c := \Phi_1 \cap \Phi_2$ ). Mit der punkt- und tangentialweisen Konstruktion von  $c$  wollen wir uns im Folgenden beschäftigen. Im Allgemeinen wird  $c$  keine ebene Kurve, sondern eine *Raumkurve* sein.

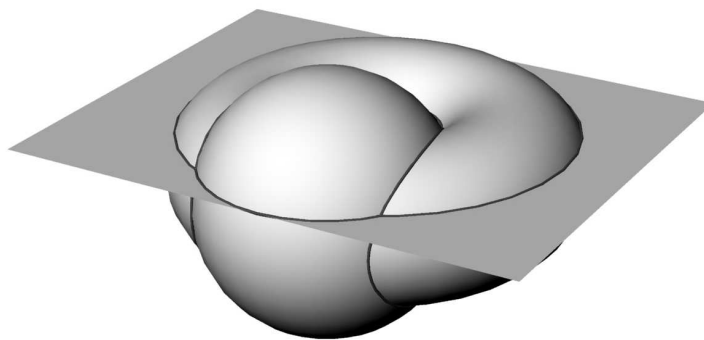


Abbildung 5.1: Konstruktion der Durchdringungskurve mit Hilfsflächen

#### 5.1.1 Punktweise Konstruktion

Diese erfolgt bei allen folgenden Aufgaben immer nach demselben Algorithmus. Man wählt eine Schar geeigneter Hilfsflächen  $\Psi$  so, dass sie  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  nach möglichst einfachen Kurven  $c_1 = \Phi_1 \cap \Psi$  und  $c_2 = \Phi_2 \cap \Psi$  schneiden (z.B. nach Geraden oder Kreisen usw.). In der Praxis sind die Hilfsflächen immer Ebenen oder Kugeln. Einen Punkt  $P$  der Schnittkurve  $c$  erhält man dann als Schnittpunkt  $P = c_1 \cap c_2$  (Abb. 5.1).

#### 5.1.2 Tangentenkonstruktion

**Tangentialebenenmethode:** Die Tangente  $t$  an die Schnittkurve  $c$  in  $P$  liegt in der Tangentialebene  $\tau_1$  an  $\Phi_1$  in  $P$  und in der Tangentialebene  $\tau_2$  an  $\Phi_2$  in  $P$ .  $t$  ist daher die Schnittgerade von  $\tau_1$  und  $\tau_2$ .  $t$  existiert, falls  $\tau_1 \neq \tau_2$ , d.h. falls sich  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  in  $P$  nicht berühren. Die Konstruktion der Tangente an die Schnittkurve nach dieser Vorschrift heißt *Tangentialebenenverfahren*. In der Praxis verfährt man so, dass  $\tau_1$  und  $\tau_2$  mit einer geeigneten Ebene  $\pi$  geschnitten werden ( $\tau_1 \cap \pi = s_1$ ;  $\tau_2 \cap \pi = s_2$ ). Der Schnittpunkt  $T$  von  $s_1$  und  $s_2$  ist dann neben  $P$  ein weiterer Punkt der gesuchten Tangente  $t$ .

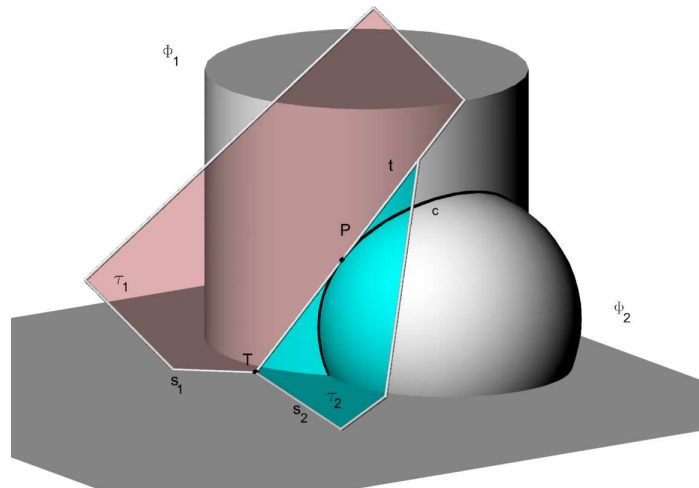


Abbildung 5.2: Tangentialebenenmethode

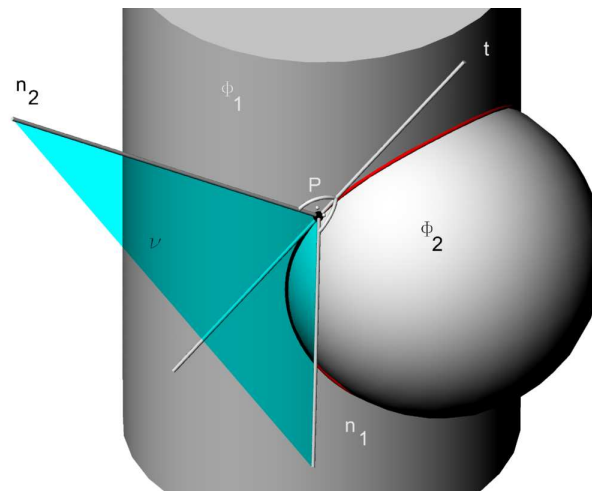


Abbildung 5.3: Normalenmethode

**Normalenmethode:** Für die Normale  $n_1$  von  $\Phi_1$  in  $P$  gilt:  $n_1 \perp \tau_1$ . Für die Normale  $n_2$  von  $\Phi_2$  gilt:  $n_2 \perp \tau_2$ . Daraus folgt  $t \perp [n_1 n_2]$ , d.h.  $t$  steht normal auf der Verbindungsebene  $\nu$  der beiden Flächennormalen. Dieses Verfahren heißt *Normalenmethode* (Abb. 5.3). Die praktische Durchführung in Normalrissen erfolgt unter Heranziehung von Hauptgeraden der Verbindungsebene  $\nu = [n_1 n_2]$ . Die gesuchte Tangente muss nämlich auf die Hauptgeraden von  $\nu$  normal stehen.

Bemerkungen:

1. Zur Ermittlung der Tangente verwendet man manchmal das Tangentialebenenverfahren, manchmal das Normalverfahren. Das tatsächlich eingesetzte Verfahren hängt von den beteiligten Flächen ab.
2. Berühren  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  einander in einem Punkt so fallen die Tangentialebenen  $\tau_1$  und  $\tau_2$  an  $\Phi_1$  bzw.  $\Phi_2$  zusammen und die beiden Verfahren zur Tangentenkonstruktion versagen. Punkte dieser Art heißen *singuläre Punkte* der Durchdringungskurve  $c$ , die ja i.a. eine Raumkurve ist. Bei Projektion von  $c$  in eine Bildebene entstehen ebene Kurven, die in  $P^p$  einen singulären Punkt besitzen. Abb. 5.4 zeigt eine derartige Situation: Die beiden Flächen berühren einander in den Punkten  $P_1$  und  $P_2$ . Sie haben dort eine gemeinsame Tangentialebene und die Durchdringungskurve besitzt zwei Tangenten.

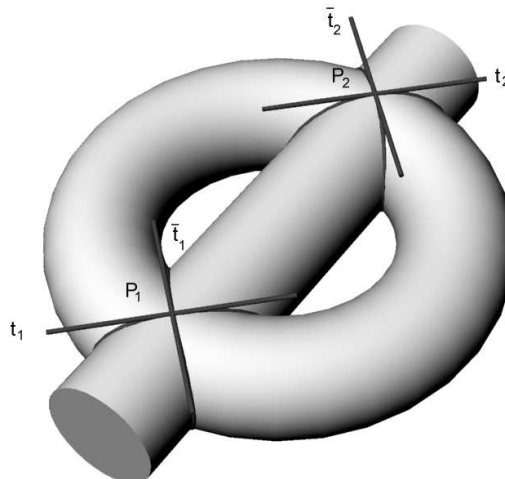


Abbildung 5.4: Tangenten in singulären Punkten der Durchdringungskurve

3. Ein Sonderfall der allgemeinen Aufgabenstellung tritt ein, wenn eine der Flächen z.B.  $\Phi_2$  eine Ebene  $\epsilon$  ist. Gelegentlich kann dann die punktweise Konstruktion jedoch dadurch erfolgen, dass man die schneidende Ebene projizierend macht. Die Tangente an die ebene Schnittkurve  $c = \Phi_1 \epsilon$  ist die Schnittgerade der Tangentialebene  $\tau_1(P)$  von  $\Phi_1$  mit der Ebene  $\epsilon$ . Wird die Normalenmethode angewendet so ist  $n_\epsilon$  die elementare Ebenennormale.

**Beispiel 5.1.1** In Grund- und Aufriss sind ein Drehkegel  $\Phi_1$  und eine Kugel  $\Phi_2$  gegeben. Man bestimme von der Schnittkurve  $c = \Phi_1 \Phi_2$  punkt- und tangentialweise  $c'$  und  $c''$ .

Konstruktionsbeschreibung:

Wir wählen als Hilfsflächenschar  $\{\Psi\}$  Ebenen parallel zu  $\pi_1$ . Jede solche Ebene schneidet den Kegel  $\Phi_1$  nach einem Kreis  $c_1$  und die Kugel  $\Phi_2$  ebenfalls nach einem Kreis  $c_2$ . Die Kreise  $c_1$  und  $c_2$  schneiden sich in zwei bezüglich  $S'M'$  symmetrisch gelegenen Punkten  $P'$  und  $\bar{P}'$ , so dass man pro Konstruktionsschritt im Grundriss zwei Punkte von  $c'$  findet. Es ist  $P'' = \bar{P}''$ . Somit liegen wegen der Symmetrie der beiden Flächen in Bezug auf die Bildebene im Aufriss immer zwei Punkte der Durchdringungskurve übereinander. Man sagt die Durchdringungskurve ist **doppelt überdeckt**. Die Tangentenkonstruktion erfolgt in diesem Fall am besten mit dem Normalenverfahren. Die Kegelnormale  $n_1$  in  $P$  findet man folgendermaßen: Drehe  $P$  auf einem Parallelkreis so lange, bis  $P$  auf die Konturerzeugende gelangt; im Aufriss  $P_0''$  dieses Punktes kann die Drehkegelnormale  $n_1^0$  sofort gezeichnet werden. Schneidet diese die Drehkegelachse im Punkt  $N_0$ , so läuft auch  $n_1$  durch  $N_0$ , denn dieser Punkt bleibt bei der Drehung fest. Damit können  $n_1'$  und  $n_1''$  gezeichnet werden. Die Kugelnormale  $n_2$  geht durch  $M$  und kann ebenfalls in beiden Rissen sofort eingetragen werden. Von der Ebene  $n_1 n_2 = \nu$  müssen nun eine erste und eine zweite Hauptgerade aufgesucht werden. Beispielsweise ist  $N_0'' M'' = h_2''$  eine zweite Hauptgerade und damit kann  $t'' \perp h_2''$  durch  $P''$  gezeichnet werden. Diese planimetrische Tangentenkonstruktion für die Aufrisskurve  $c''$  läßt sich auch im höchsten Punkt  $A''$  und im tiefsten Punkt  $B''$  von  $c''$  ausführen.  $t_A''$  ist aber nicht das Bild der Tangente von  $c$  in  $A$ , denn diese Tangente ist dort projizierend (da die Tangentialebenen  $\tau_1$  an  $\Phi_1$  und  $\tau_2$  an  $\Phi_2$  in  $A$  beide normal zu  $\pi_2$  sind).  $t_A''$  ist vielmehr die projizierend erscheinende Schmiegebene in  $A \in c$ , wie hier ohne Beweis mitgeteilt sei. Dasselbe gilt für  $t_B''$ . Die Konturpunkte der Durchdringungskurve für den Grundriss liegen im Aufriss auf der Hilfsebene  $\gamma$ , die durch  $M''$  geht: Sie können im Grundriss daher leicht ermittelt werden. Die Gleichung des Auf-

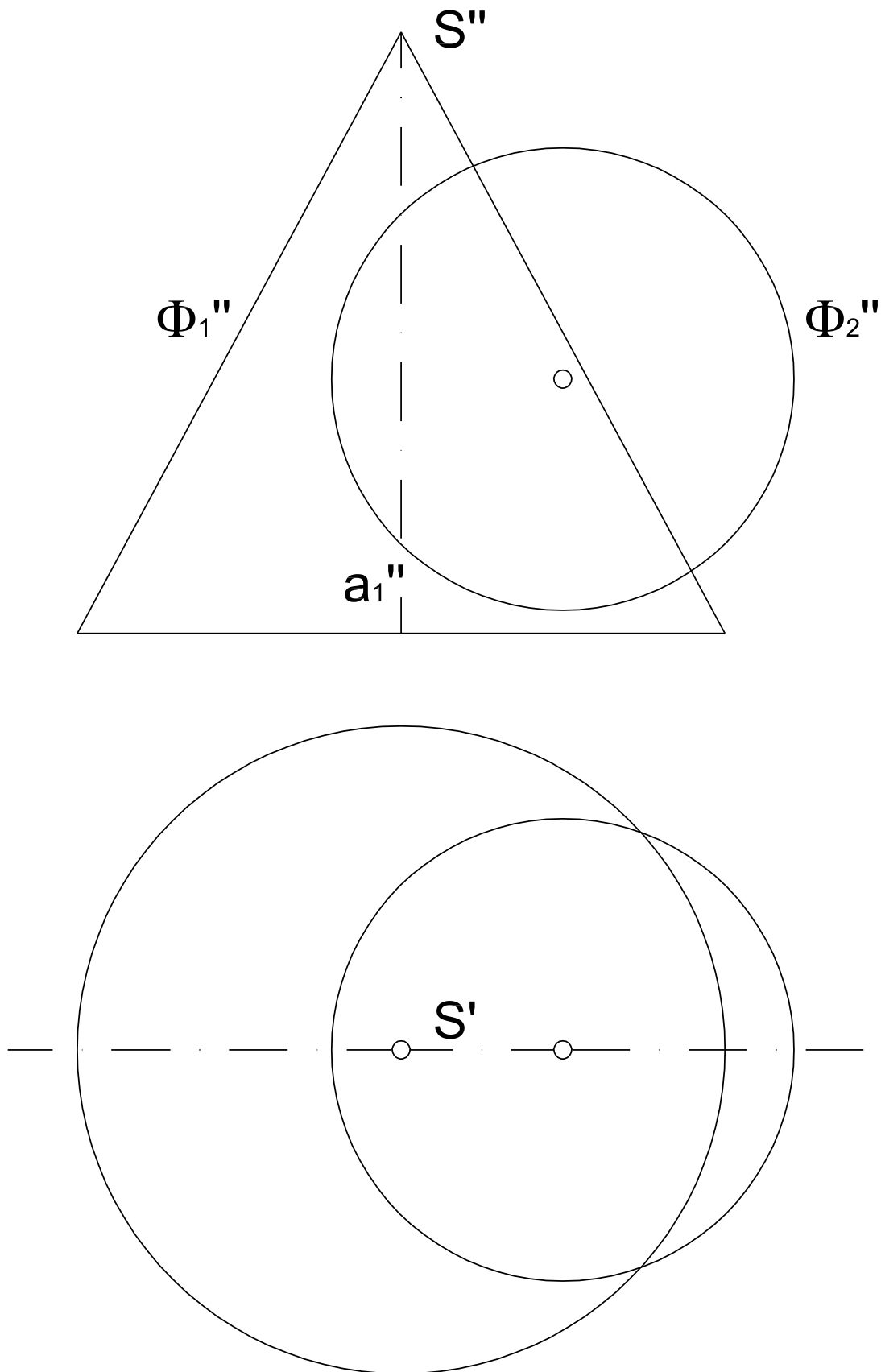


Abbildung 5.5: Durchdringung Kegel-Kugel

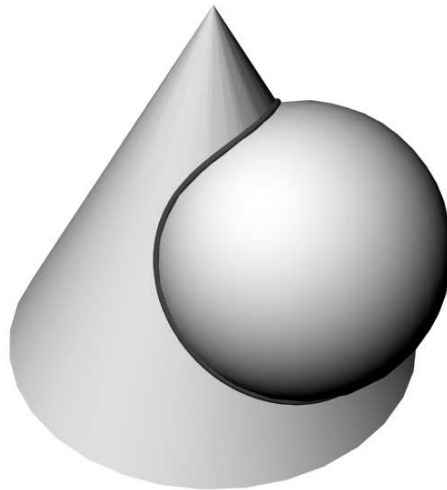


Abbildung 5.6: Durchdringung Kegel-Kugel

risses  $c''$  der Durchdringungskurve läßt sich leicht durch Rechnung angeben. Dazu bringen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung in  $S$  an und stellen zunächst die Gleichung eines Drehkegels vom halben Öffnungswinkel  $\alpha$  auf. Für einen Kegelpunkt  $X(x, y, z)$  gilt dann

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \tan \alpha$$

und durch Quadrieren erhält man die Kegelmgleichung

$$z^2 \tan^2 \alpha = x^2 + y^2 \quad (5.1)$$

Der Kugelmittelpunkt hat die Koordinaten  $M(0, m_2, m_3)$  und damit lautet die Kugelgleichung

$$x^2 + (y - m_2)^2 + (z - m_3)^2 = r^2 \quad (5.2)$$

Wird aus der Kugelgleichung 5.2 und aus der Kegelmgleichung 5.1 die Variable  $x$  eliminiert, so erhält man die Gleichung von  $c''$ :

$$2m_2y = (1 + \tan^2 \alpha)z^2 - 2m_3z + m_2^2 - r^2 \quad (5.3)$$

Wegen  $m_2 \neq 0$  ist dies eine Parabel, deren Achse parallel zur  $y$ -Achse ist. Wäre  $m_2 = 0$ , dann würde der Kugelmittelpunkt auf der Drehachse des Kegels gelegen und der Aufriss der Durchdringungskurve würde in zwei  $y$ -parallele Geraden zerfallen. Im Raum würde die Durchdringungskurve durch zwei Parallelkreise auf Kegel und Kugel gegeben sein. Mit der Möglichkeit des Zerfallens der Durchdringungskurve in zwei oder mehrere Bestandteile werden wir uns noch ausführlich auseinandersetzen.

**Beispiel 5.1.2** Eine Halbkugel  $\Phi_1$  deren Äquatorkreis in  $\pi_1$  liegt, ist mit einem zweitprojizierenden Drehzylinder  $\Phi_2$  zu schneiden. Man bestimme  $c'$  punkt- und tangentialweise.

Konstruktion:

Wir wählen als Hilfsflächen  $\{\Psi\}$  erste Hauptebenen. Jede solche Ebene schneidet  $\Phi_1$  nach einem Kreis  $c_1$  und  $\Phi_2$  nach zwei zweitprojizierenden Zylindererzeugenden  $c_2$  und  $\bar{c}_2$ . Im

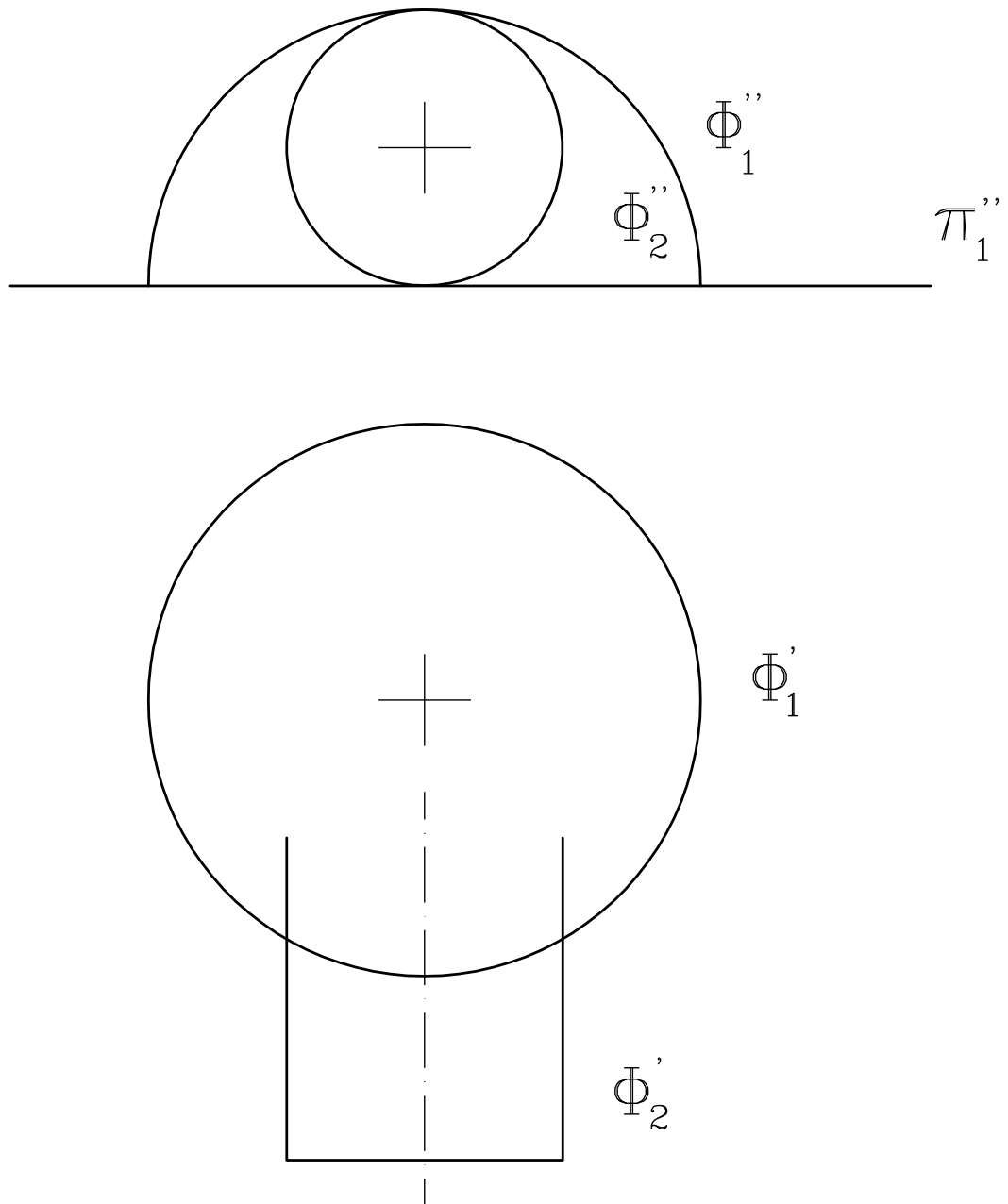


Abbildung 5.7: Durchdringung Zylinder-Kugel

Grundriss erhält man so pro Konstruktionsschritt 4 Schnittpunkte  $P_i = c_1 \cap c_2(\bar{c}_2)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ).

Die Tangentenkonstruktion erfolgt wieder sehr zweckmäßig mit dem Normalverfahren. Die Kugelnormale  $n_1$  geht durch den Kugelmittelpunkt  $M$ , die Drehzylindernormale  $n_2$  schneidet die Zylinderachse  $a$  normal; somit können  $n_1'', n_2''$  und  $n_1', n_2'$  in einem Punkt  $P$  sofort gezeichnet werden. Die Tangente in  $P$  ist normal auf eine Hauptgerade der Verbindungsebene  $\nu = n_1 n_2$ .

Die Umrisspunkte von  $c$  auf den beiden Umrisserzeugenden des Drehzylinders lassen sich ebenfalls leicht über den Aufriss konstruieren.

### 5.1.3 Das Kugelverfahren von G. MONGE

Dieses Verfahren wird verwendet, wenn man die Durchdringungskurve von zwei Drehflächen  $\Phi_1, \Phi_2$  mit schneidenden Achsen  $a_1, a_2$  konstruieren soll. Der Schnittpunkt von  $a_1$  und  $a_2$  sei  $S$ . Wir verwenden die Verbindungsebene von  $a_1$  und  $a_2$  als Bildebene  $\pi_2$  bzw. als zweite Hauptebene. Im Zeichenbeispiel Abb.5.8 (Dachrinne mit konischem Verbinder zum Fallrohr) ist  $\Phi_1$  ein Drehzylinder mit Achse  $a_1$  und  $\Phi_2$  ein Drehkegel mit Achse  $a_2$ .

Als Hilfsflächen verwendet man konzentrische Kugeln um den Mittelpunkt  $S = a_1 a_2$ . Daher wird diese Methode *Kugelmethode* genannt. Die Hilfskugeln schneiden  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  nach Breitenkreisen, die im Aufriss als Strecken erscheinen. Die Projektion  $c''$  der Schnittkurve  $c = \Phi_1 \cap \Phi_2$  ist von den Schnittpunkten der in der Bildebene liegenden Meridiankurven von  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  begrenzt.

Die Tangente in einem Punkt  $P$  von  $c$  konstruiert man nach der Normalenmethode: Die Flächennormalen  $n_1$  bzw.  $n_2$  schneiden die Achsen  $a_1$  bzw.  $a_2$  in den Punkten  $N_1$  bzw.  $N_2$ . Da  $a_1 a_2 = \pi_2$  zweite Hauptebene ist, ist die Gerade  $N_1 N_2 = h_2$  zweite Hauptgerade der Verbindungsebene  $n_1 n_2$ . Außerdem gilt:  $t \perp n_1 n_2 \Rightarrow t'' \perp h_2'' = N_1'' N_2''$ .

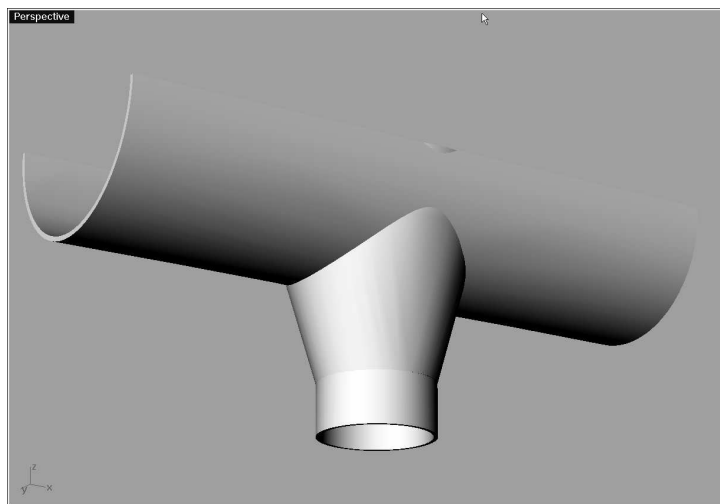


Abbildung 5.8: Dachrinne

Bemerkungen:

1. Durch Rechnung kann man zeigen: Obige Tangentenkonstruktion läßt sich planimetrisch auch in den Schnittpunkten  $A, B$  der Meridiane durchführen; die entstehende Tangente ist aber nicht das Bild der räumlichen Tangente, da die Tangente zweitprojizierend ist; sie ist vielmehr das Bild der in diesen Punkten zweitprojizierenden

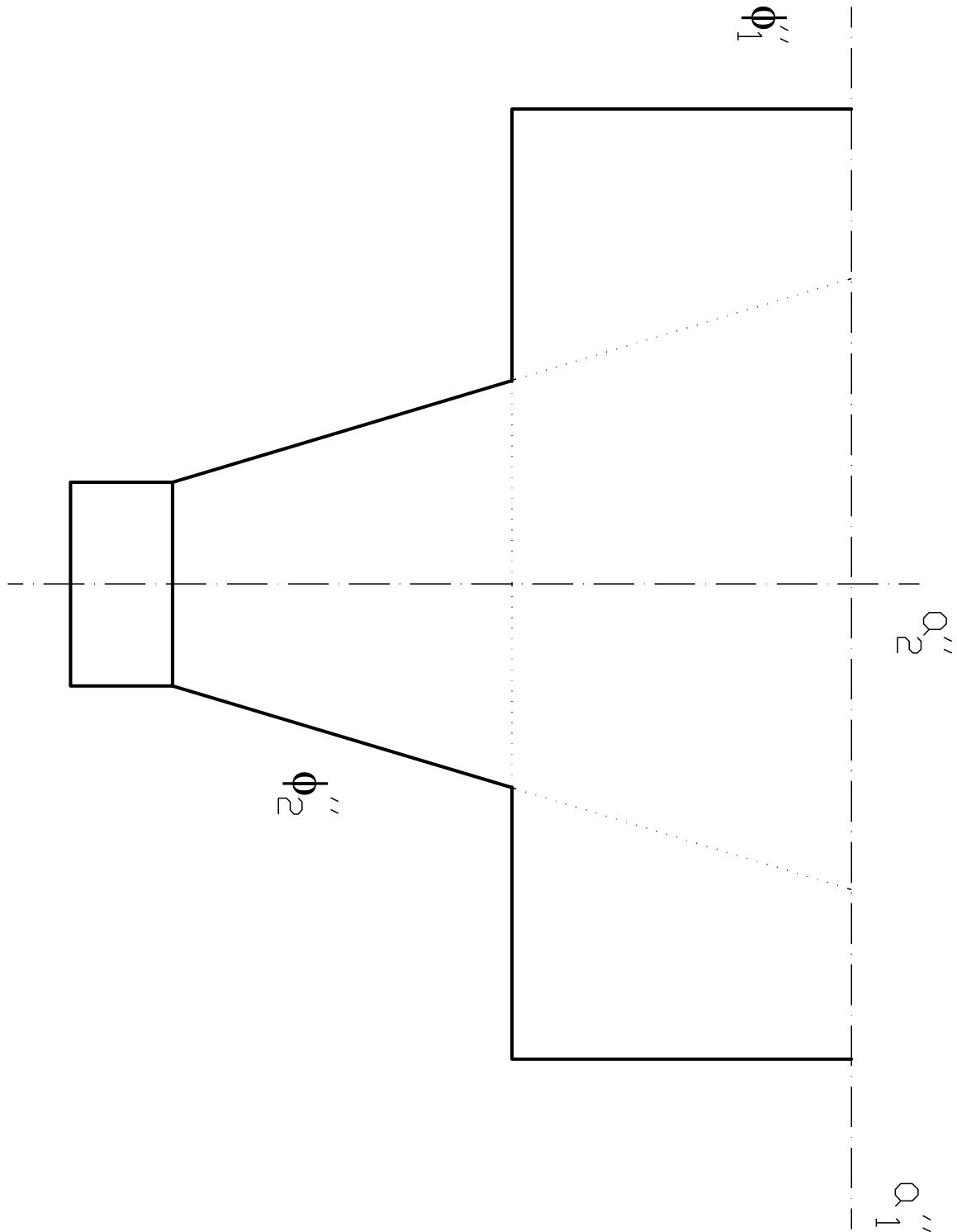


Abbildung 5.9: Mongesches Kugelverfahren

Schmiegebene von  $c$ . Eine Schmiegebene enthält neben der Kurventangente auch den (räumlichen) Krümmungskreis der Durchdringungskurve im betrachteten Punkt.

2. Obiges planimetrisches Verfahren für die punktweise Konstruktion liefert auch Punkte, welche außerhalb des von den Meridiankurven begrenzten Gebietes liegen. Diese Punkte sind keine Bilder von reellen Punkten der Durchdringungskurve. Man nennt solche Punkte *parasitische Punkte*; sie entstehen durch Projektion eines konjugiert-



komplexen Punktepaars der Durchdringungskurve auf einem reellen Sehstrahl normal zu  $\pi_2$ .

**Beispiel 5.1.3** Man ermittle die Schnittkurve  $c$  zweier Drehzylinder  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  mit schneidenden Achsen  $a_1$  und  $a_2$ , aber verschiedenen Radien  $r_1$  und  $r_2$ .

Konstruktionsbeschreibung: Die Konstruktion von  $c = \Phi_1 \Phi_2$  erfolgt nach dem Kugelverfahren, unter Benützung des gemeinsamen Kugelmittelpunktes  $M = a_1 a_2$ .

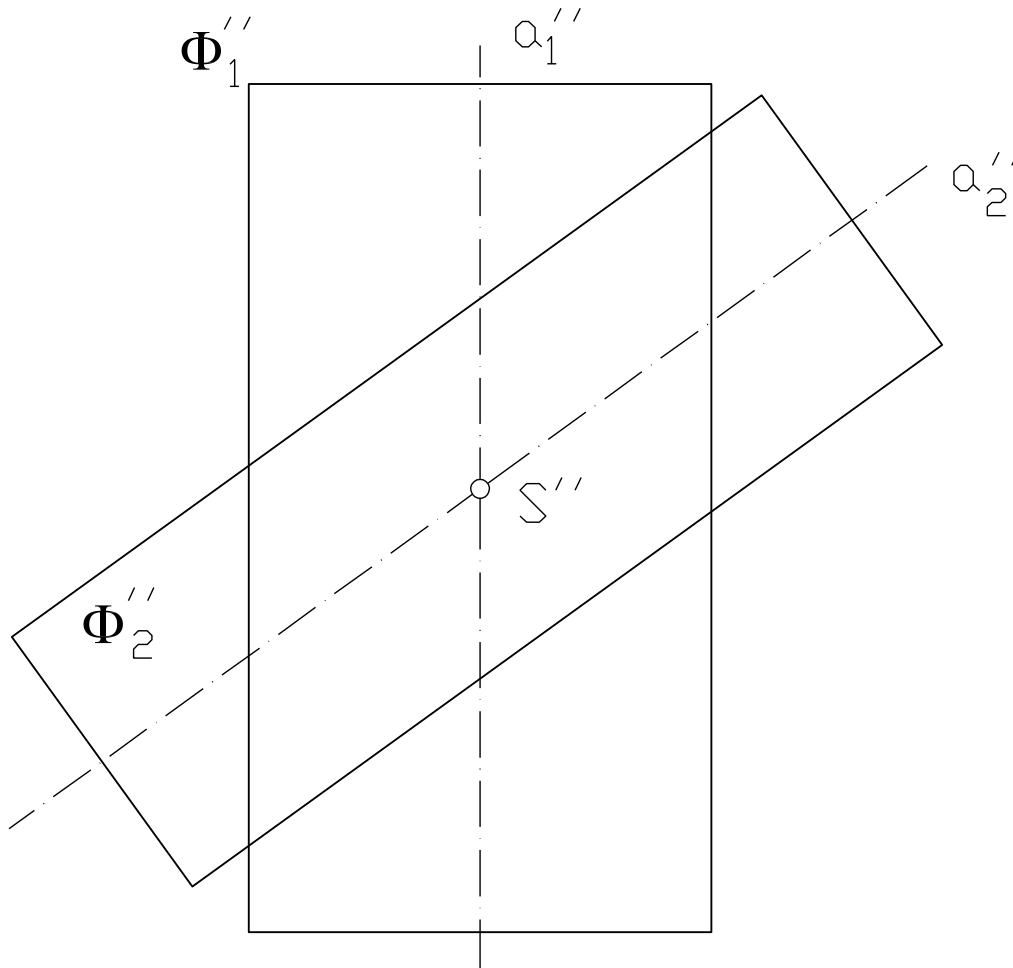


Abbildung 5.10: Zylinder-Zylinder Durchdringung

Die Gleichung der Kurve  $c''$  kann man durch eine einfache Rechnung feststellen. Dazu bestimmen wir vorerst die Gleichung des Drehzylinders  $\Phi_2$ , indem wir in Abb. 5.10 ein geeignetes kartesisches Koordinatensystem hinzufügen. In diesem System wird der Zylinder  $\Phi_2$  durch die Gleichung

$$x^2 + (y \cos \varphi - z \sin \varphi)^2 - r_2^2 = 0 \quad (5.4)$$

dargestellt, wobei mit  $\varphi$  der Winkel zwischen der  $a_1$  und  $a_2$  bezeichnet wurde.  $\Phi_1$  besitzt die Gleichung  $x^2 + y^2 - r_1^2 = 0$ . Eliminiert man aus den beiden Zylindergleichungen die  $x$ -Koordinate, dann erhält man die Gleichung des Aufrisses der Durchdringungskurve:

$$y^2 - (y \cos \varphi - z \sin \varphi)^2 = r_1^2 - r_2^2 \quad (5.5)$$

Der Aufriss der Durchdringungskurve ist eine Kurve 2. Ordnung; sie besitzt zwei verschiedene reelle Fernpunkte, für deren Richtungen man aus 5.5 über Nullsetzen der linken

Seite

$$(z \sin \varphi + y - y \cos \varphi)(-z \sin \varphi + y \cos \varphi + y) = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{z}{y}\right)_1 = -\frac{1 - \cos \varphi}{\sin \varphi} = -\tan \frac{\varphi}{2} \quad \left(\frac{z}{y}\right)_2 = \frac{1 + \cos \varphi}{\sin \varphi} = \cot \frac{\varphi}{2} \quad (5.6)$$

erhält. Die Kurve ist daher eine Hyperbel mit den Asymptoten 5.6. Evident halbiert die Asymptoten den Winkel zwischen den beiden Zylinderachsen und stehen damit auch senkrecht aufeinander. Der Aufriss der Durchdringungskurve ist daher eine gleichseitige Hyperbel.

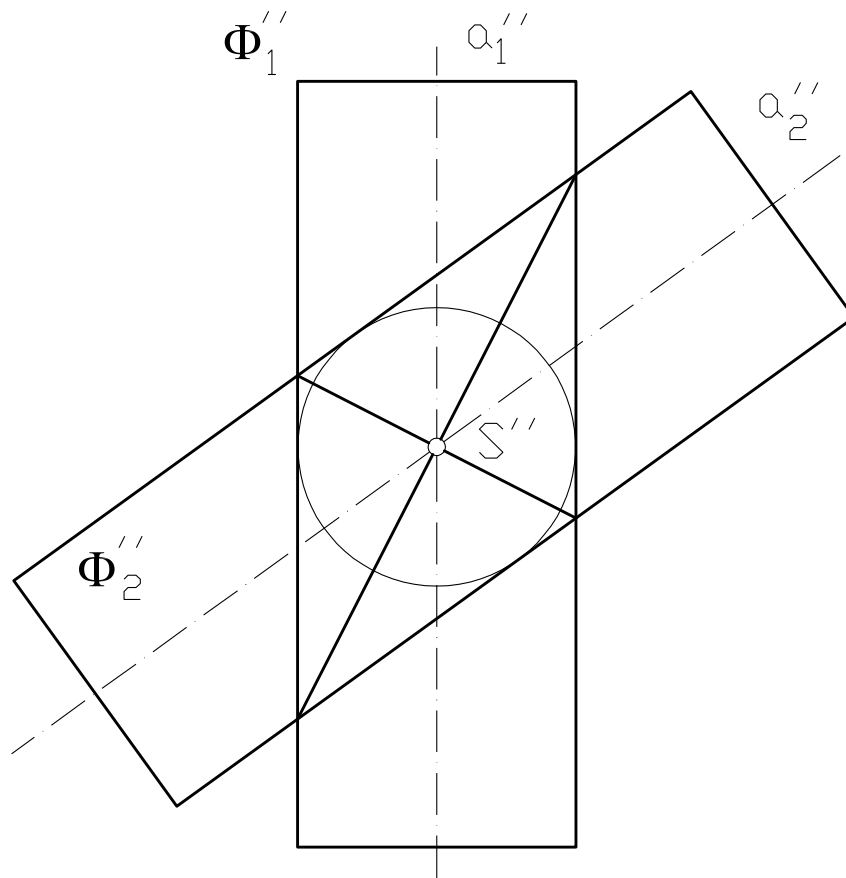


Abbildung 5.11: Zerfall der Durchdringungskurve

**Zerfall der Durchdringungskurve:** Falls die Radien der beiden Zylinder gleich groß sind, dann ist  $c''$  reduzibel und zerfällt in die beiden Geraden  $z = -y \tan \frac{\varphi}{2}$  und  $z = y \cot \frac{\varphi}{2}$ . Die räumliche Schnittkurve  $c$  besteht dann aus zwei Ellipsen; diese werden nämlich von den zweitprojizierenden Ebenen  $z = -y \tan \frac{\varphi}{2}$  und  $z = y \cot \frac{\varphi}{2}$  aus  $\Phi_1$  (und auch aus  $\Phi_2$ ) herausgeschnitten. Wie man in der Abbildung 5.11 sieht gibt es genau in diesem Fall eine Mongekugel die beide Flächen gleichzeitig berührt. Diese Bemerkung liefert auch ein allgemeines Kriterium für den Zerfall der Durchdringungskurve zweier Drehflächen 2. Ordnung: Existiert eine Kugel die gleichzeitig beide Flächen nach je einem Kreis berührt, dann zerfällt die Durchdringungskurve in zwei Kegelschnitte (*Kugelkriterium*).

Diese Aussage von hat eine Reihe von praktischen Anwendungen. Dies zeigen z.B. Abb. 5.12, 5.13 und 5.14 in denen einige Rohrabzweigungen dargestellt sind.

Weitere wichtige Anwendungen sind Gewölbeformen in der Architektur, z.B.:

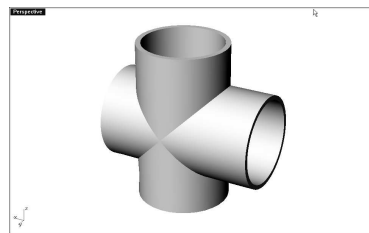
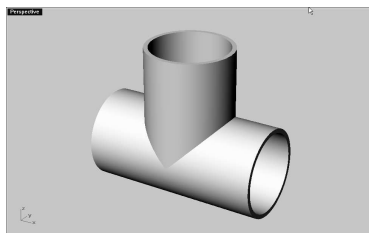
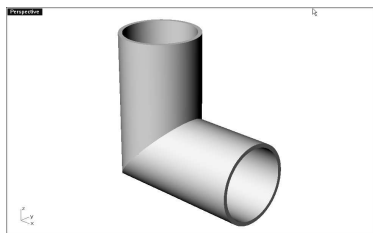


Abbildung 5.12: Rohrknie

Abbildung 5.13: T-Stück

Abbildung 5.14: Kreuzstück

1. römisches Kreuzgewölbe mit vier Kappen,
2. Klostergewölbe mit vier Wangen,
3. offenes Klostergewölbe.

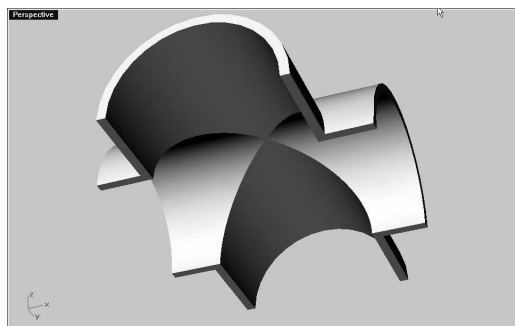
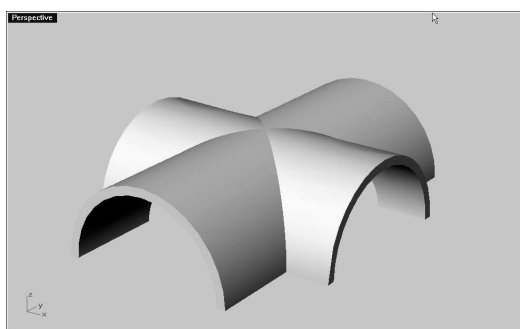


Abbildung 5.15: Kreuzgewölbe von oben

Abbildung 5.16: Kreuzgewölbe von unten

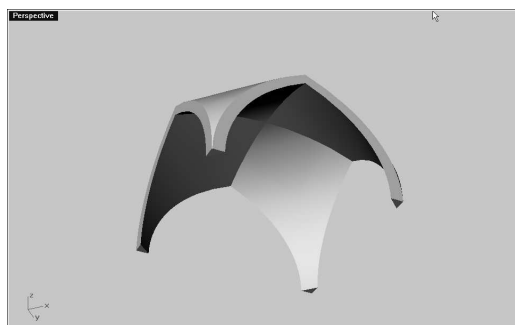


Abbildung 5.17: Offenes Klostergewölbe von oben

Abbildung 5.18: Offenes Klostergewölbe von unten

Liegen allgemein zwei Drehflächen  $\Phi_1$   $\Phi_2$  2. Ordnung vor, deren Achsen in einer Ebene  $\sigma$  liegen, so ist ihre Durchdringungskurve eine zu  $\sigma$  symmetrisch liegende Kurve 4. Ordnung ( $c_4$ ). Es gilt der folgende

**Satz 5.1.1** Sind  $\Phi_1$  und  $\Phi_2$  derselben Kugel  $\kappa$  umschrieben und sind die Berührkreise mit  $\kappa$  verschieden, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei Kegelschnitte:  $k_1$  und  $k_2$ .

Beispiele von zerfallenden Durchdringungskurven sind in Abb.5.20 zu sehen. Die beteiligten Drehflächen sind Kegel-Zylinder, Kegel-Kegel, Drehellipsoid-Zylinder. In allen drei

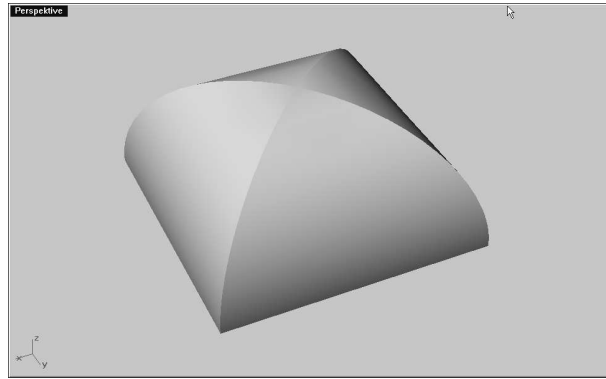


Abbildung 5.19: Klostergewölbe

Fällen ist die gemeinsame Berührkugel eingezeichnet. Man beachte, dass im Falle Kegel-Zylinder nur Teile der beiden Ellipsen für die technische Ausführung ausgenutzt werden, da nur der eindringende Teil des Kegels gebraucht wird. Im Falle Kegel-Kegel wird überhaupt nur eine der beiden Schnittellipsen verwendet und die beiden Flächen sind zusätzlich noch mit drei Ebenen abgeschnitten (Wie würde die zweite Schnittellipse in diesem Fall liegen?).

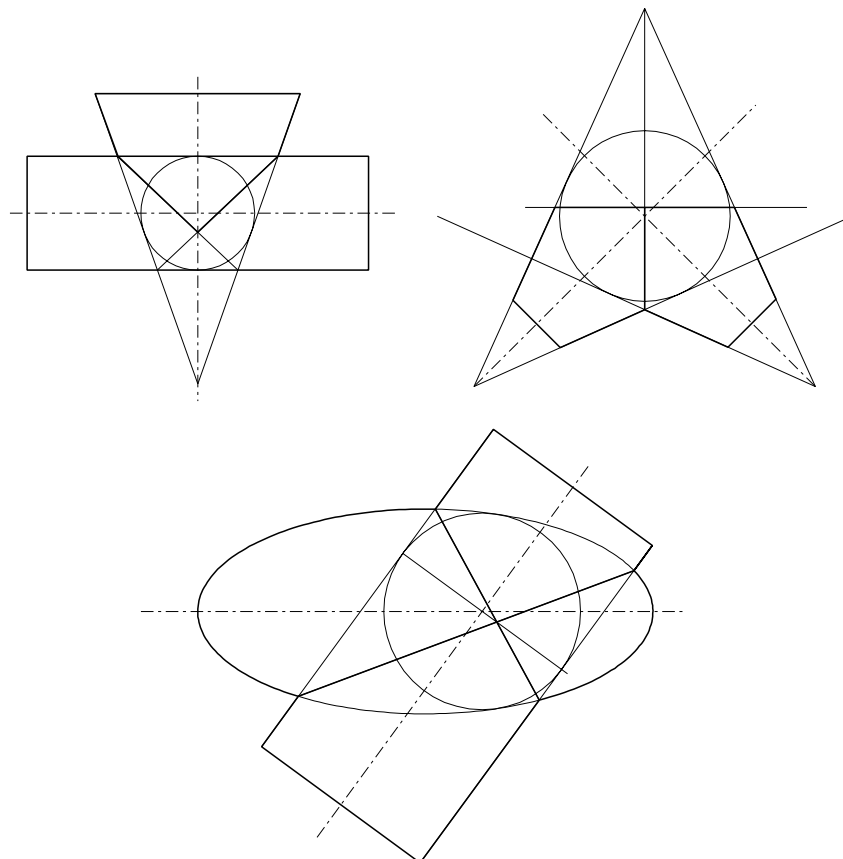


Abbildung 5.20: Zerfallende Durchdringungskurven von Drehflächen 2. Ordnung

Zum Abschluss dieses Abschnittes behandeln wir einige spezielle Durchdringungen von Torusflächen.

**Beispiel 5.1.4** Ein Dorntorus  $\Phi_1$  ist mit einem Drehzylinder  $\Phi_2$  zu schneiden, der  $\Phi_1$  längs eines Meridiankreises  $m$  berührt. In Abbildung 5.21 wurde hierbei die Torusachse

erstprojizierend und  $m$  in der zweiten Hauptebene durch  $a$  gewählt. Konstruktionsbeschreibung:

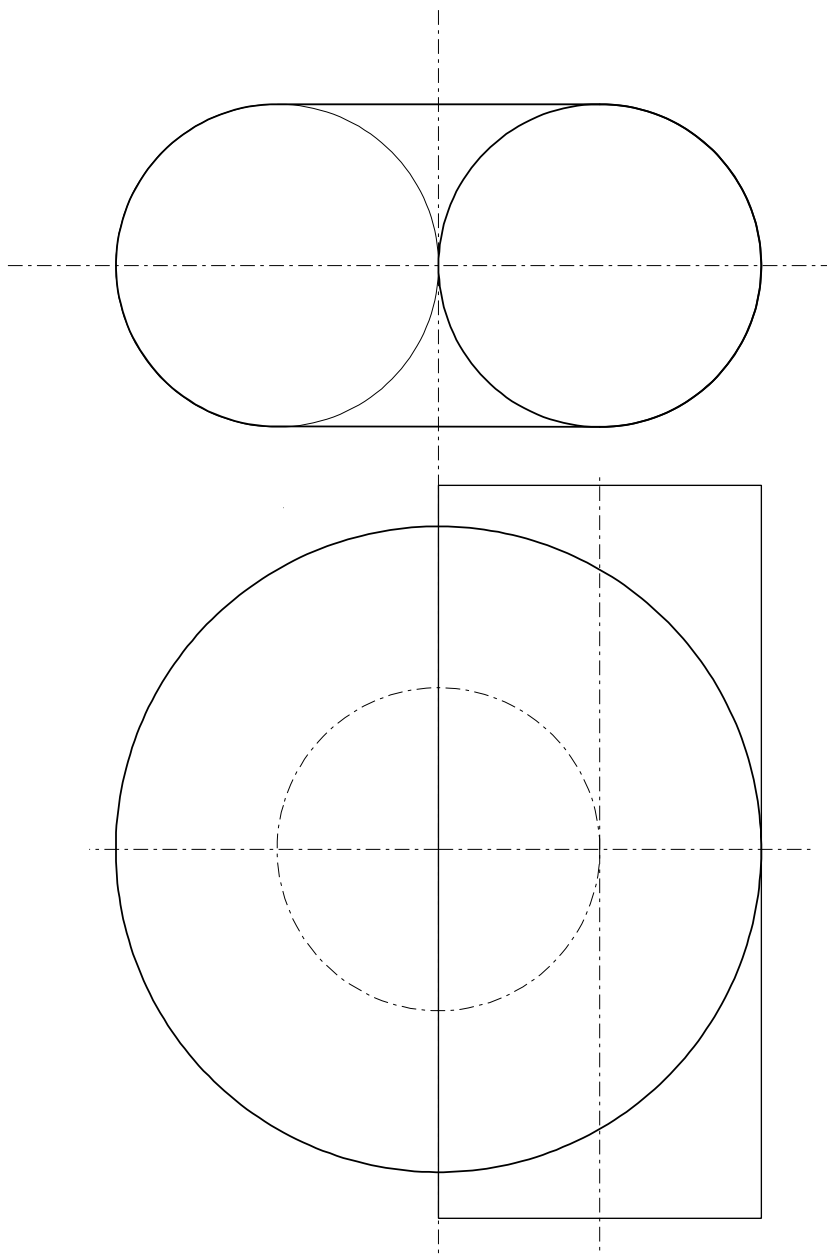


Abbildung 5.21: Durchdringung Dorntorus Zylinder

Als Schnittebenen  $\Phi_1$  nehmen wir 1. Hauptebenen und bemerken, dass im Grundriss neben den Punkten auf  $m'$  nur mehr 2 Punkte pro Konstruktionsschnitt auftreten. Eine leichte Rechnung zeigt, dass der Grundriss der Durchdringungskurve aus  $m'$  und einem Teil einer Parabel besteht. Aus ?? folgt die Dorntorusgleichung ( $a = b$ )

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \quad (5.7)$$

Die Gleichung des Drehzylinders erhält man über  $(y - a)^2 + z^2 = a^2$  mit:

$$y^2 - 2ay + z^2 = 0 \quad (5.8)$$

Die Gleichung des Grundrisses der Durchdringungskurve  $c'$  erhält man durch Elimination der  $z$ -Koordinaten aus 5.7 und 5.8 mit

$$x^2(4a^2 - x^2 - 4ay) = 0 \quad (5.9)$$

Gleichung (5.9) gestattet folgende Interpretation: der Grundriss besteht aus einem Stück der Geraden  $x = 0$  und einem Teil der Parabel  $y = a - \frac{1}{4a}x^2$ , deren Scheitel im Punkt  $(0, a)$  liegt, deren Achse die  $y$ -Achse ist und deren Brennpunkt mit dem Grundriss Torusachse übereinstimmt. Die Tangentenkonstruktion an  $c'$  erfolgt mit dem Normalenverfahren oder man könnte auch ausnutzen, dass bewiesen wurde, dass  $c'$  eine Parabel ist und die Tangenten planimetrisch als Parabeltangente konstruieren.

**Beispiel 5.1.5** Ein Torus  $\Phi_1$  wird mit einer Kugel  $\Phi_2$  geschnitten, die einen Meridiankreis von  $\Phi_2$  enthält. Man zeige, dass der Restschnitt ein weiterer Meridiankreis  $c_1$  ist.

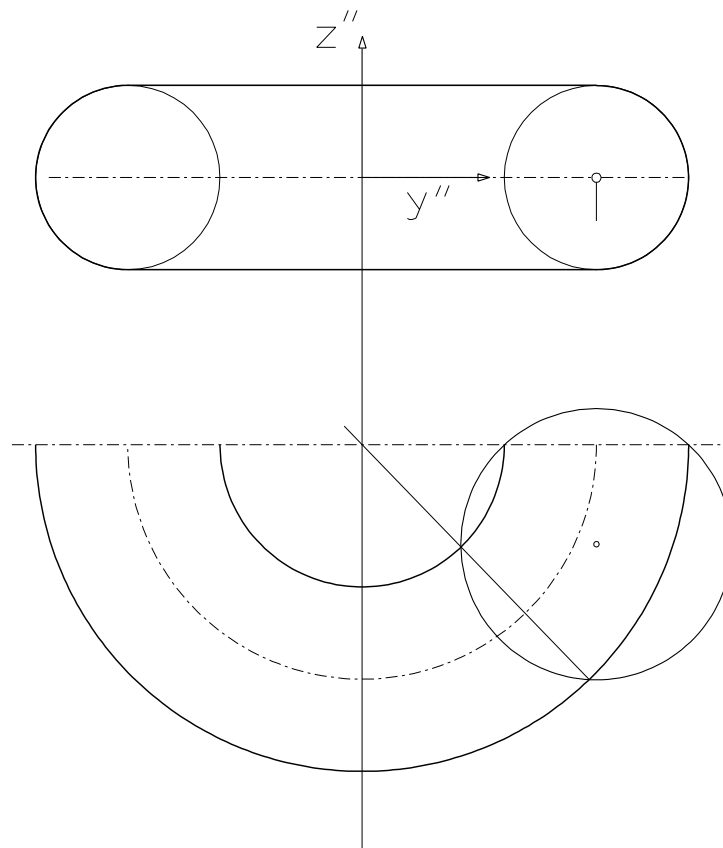


Abbildung 5.22: Durchdringung Torus-Kugel

Lösung: Es genügt, die Überlegungen für den Hauptmeridian  $m$  in der zweiten Hauptebene durch  $a$  auszuführen. Alle Kugeln  $\Phi_2$  dieser Art haben ihren Mittelpunkt auf der Kreisachse von  $m$ . Sie besitzen daher den Mittelpunkt  $M(\lambda, b, 0)$  und den Radius  $r^2 = \lambda^2 + a^2$ , wobei  $\lambda$  der Scharparameter ist. Mit  $\Phi_2 \dots (x - \lambda)^2 + (y - b)^2 + z^2 = r^2$  und Einsetzen von  $r^2$  folgt:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\lambda x - 2by + b^2 - a^2 = 0 \quad (5.10)$$

Eliminiert man aus 5.10 und ??  $z$  dann bleibt

$$\lambda^2 x^2 + 2b\lambda xy - b^2 x^2 = 0 \Rightarrow x(\lambda^2 x + 2b\lambda y - b^2 x) = 0 \quad (5.11)$$

Von 5.11 spaltet sich einmal die Lösung  $x = 0$  ab und als Rest bleibt die Gerade:

$$y = \frac{b^2 - \lambda^2}{2b\lambda} x \quad (5.12)$$

sodass  $c_1$  in einer erstprojizierenden Ebene  $\epsilon$  durch die Torusachse liegt.  $\epsilon$  schneidet die Kugel nach einem Kreis, der ein weiterer Meridiankreis von  $\Phi_1$  ist.

### Beispiel 5.1.6 Ebene Schnitte des Torus

1. Ebene Schnitte des Torus mit Ebenen parallel zur Torusachse heißen spirische Linien des Perseus. Abb.5.23 zeigt mehrere derartigen Schnitte bei einem Ringorus.

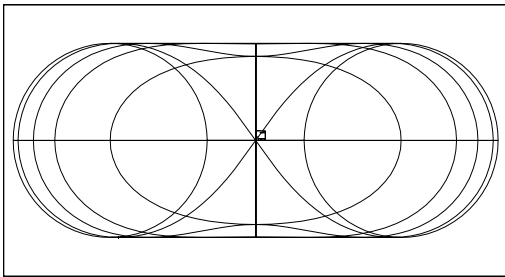


Abbildung 5.23: Ebene Schnitte des Torus (Spirische Linien des Perseus und Lemniskate)

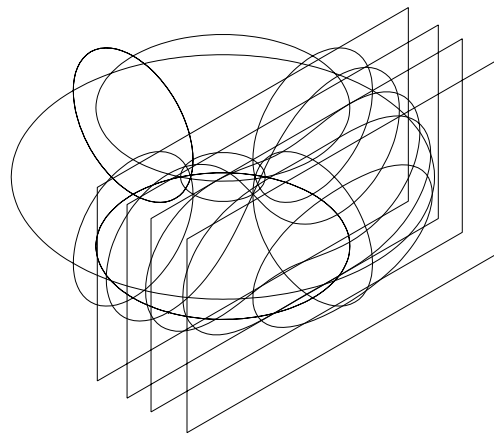


Abbildung 5.24: Ebene Schnitte des Torus

2. Unter den Schnittebenen parallel zur Torusachse gibt es auch Tangentialebenen. Sie schneiden den Torus nach Bernoullischen Lemniskaten. Die Lemniskaten haben einen Doppelpunkt, der vom Berührungspunkt der Schnittebene stammt.
3. Ebene Schnitte des Torus mit Doppeltangentialebenen. Schneidet man den Torus  $\Phi_1$  mit Doppeltangentialebenen, dann erhält man 2 Kreise als Schnittkurven. Doppeltangentialebenen sind Tangentialebenen, die genau zwei Meridiankreise berühren. Die als Schnittkurve auftretenden Kreise werden Loxodromenkreise oder Villarceausche Kreise genannt.

### 5.1.4 Durchdringung im CAD

Erst seit relativ kurzer Zeit ist es möglich Durchdringungen mit CAD-Software zu konstruieren. Hierbei ist gemeint, dass die Durchdringungskurve wirklich bestimmt wird und für nachfolgende Konstruktionen genutzt werden kann. In den meisten CAD-Systemen kann die Durchdringung konstruiert werden, wenn die Objekte als *solids* (Festkörper) vorhanden sind. Diese können dann über die drei *Boolschen* Operationen Vereinigung, Differenz und Durchschnitt miteinander verknüpft werden. Diese Operationen sind die üblichen mengentheoretischen Operationen. Wir betrachten die Wirkung der drei Operationen auf die Durchdringung eines Torus und einer Kugel. Die Arten von Objekten, die mit diesen Operationen behandelt werden können variieren von CAD-System zu CAD-System. Es

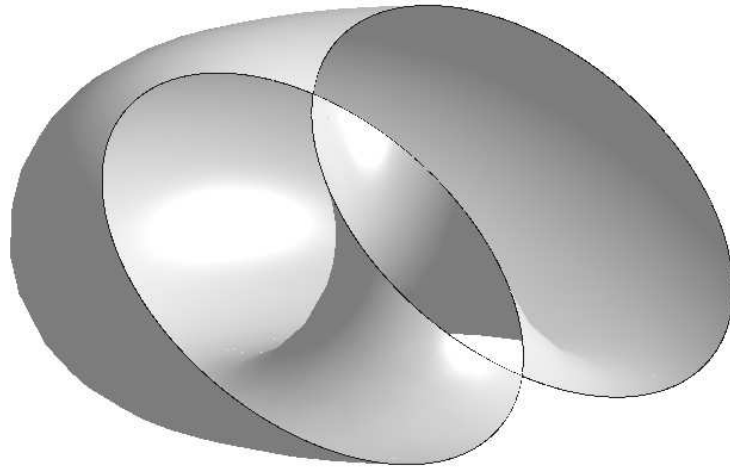


Abbildung 5.25: Villarceausche Kreise am Torus

Solid-Union  
Vereinigung

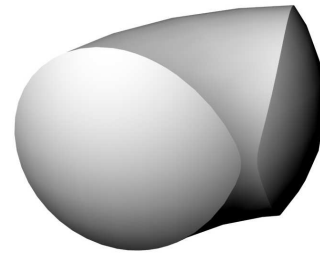
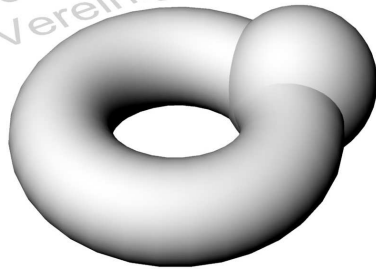


Abbildung 5.26: Vereinigung und Durchschnitt

Differenz

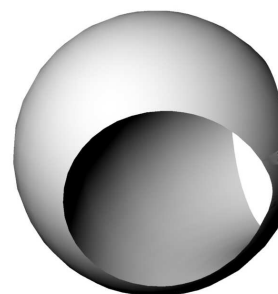
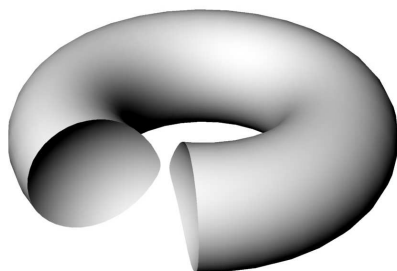


Abbildung 5.27: Die beiden Möglichkeiten der Differenzbildung

seien daher nur die wichtigsten genannt: Quader (box, slab), Kugel, Drehzylinder, Drehkegel, Drehkegelstumpf, Torus, Extrusionssolid, Drehsolid. Eine Warnung: In manchen CAD-Systemen (z.B. AutoCad) ist eine Umkehrung der Booleschen Operation nicht mehr möglich, d.h. wenn zwei Objekte einmal vereinigt sind kann man sie nicht mehr trennen oder die Größe verändern. Systeme die mit *parametrischen Solids* arbeiten bieten diese Möglichkeiten jedoch an: auch nach der Ausführung einer Booleschen Operation kann diese rückgängig gemacht werden und es können auch noch die geometrischen Parameter



(z. B.: Länge, Breite und Höhe eines Quaders; Radius einer Kugel; Basiskreisradius und Höhe eines Drehzylinders) der beteiligten Objekte verändert werden. Trotz des ansprechenden Formenrepertoires ist der Designprozess aber immer noch sehr beschränkt, kann man doch nur die vorgegebenen Formen miteinander verknüpfen. Einen völlig neuen Zugang bieten die CAD-Systeme die auf der NURBS Technologie beruhen (z.B. Rhinoceros = RHINO3D). Hier können alle Objekte wie Flächen, Polyflächen (zusammengesetzte Flächen) und auch Solids miteinander verschnitten werden<sup>1</sup>. Dies gestattet nun weit über die klassische Darstellende Geometrie und ihre Konstruktionsmethoden hinauszugehen. Ein Beispiel zeigt die Abb.5.28 wo eine Freiformfläche mit einem elliptischen Zylinder verschnitten wurde.

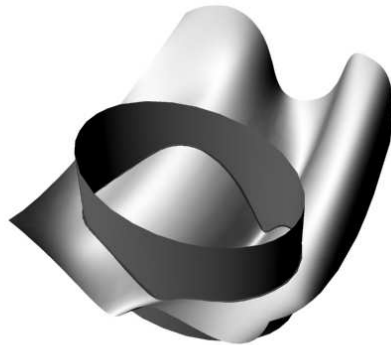


Abbildung 5.28: Durchdringung von NURBS-Flächen

## 5.2 Übersichtsfragen

1. Was ist der Unterschied zwischen einer empirischen Fläche und einer gesetzmäßigen Fläche?
2. Was ist eine algebraische Fläche? Was versteht man unter ihrer Ordnung? Wie kann die Ordnung anschaulich erklärt werden?
3. Was versteht man unter einer Quadrik, welche Beispiele gibt es?
4. Wie bekommt man rechnerisch die Tangentialebene einer algebraischen Fläche?
5. Was versteht man unter dem Umriss einer Fläche? Was ist eine Kontur? Was ist ein Konturpunkt, ein Umrisspunkt?
6. Wann treten auf einer Umrisskurve Spitzen auf? Muss die zur Umrisskurve gehörige Kontur auch Spitzen haben?
7. Welche Methoden gibt es um die Durchdringungskurve von zwei Flächen zu konstruieren?
8. Welche Methoden gibt es die Tangente an eine Durchdringungskurve zu konstruieren? Wann gibt es Schwierigkeiten?

---

<sup>1</sup>In RHINO werden alle Flächen bzw. Polyflächen, wenn sie ein Volumen umschließen automatisch in Solids verwandelt.

9. Wie wird eine Drehfläche bestimmt? Was muss man angeben? Was ist ein Meridian, ein Breitenkreis, Kehlkreis, ein Äquator? Wie konstruiert man die Flächennormale auf eine Drehfläche? Was versteht man unter der Vervollständigungsaufgabe bei Drehflächen?
10. Was sind die Voraussetzungen für das Kugelverfahren nach Monge? Wie funktioniert dieses Verfahren?
11. Was versteht man unter einer doppelt überdeckten Durchdringungskurve?
12. Was ist das Bild der Durchdringungskurve von zwei Drehzylindern mit schneidenden Achsen auf die Verbindungsebene der Achsen?
13. Wann zerfällt die Durchdringungskurve von zwei Drehzylindern? Welche Anwendungen gibt es in diesem Fall?
14. Wie ist ein Torus definiert und welche Eigenschaften hat diese Fläche? Wie ermittelt man den Umriss des Torus bei Normalprojektion?
15. Was versteht man unter Rohrflächen?
16. Was sind Parallelkurven? Welche gemeinsamen Eigenschaften haben Parallelkurven?
17. Wie ist eine Kreisfläche definiert? Welche bekannten Flächen sind Kreisflächen?
18. Was sind die Voraussetzungen für das verallgemeinerte Kugelverfahren?
19. Was versteht man unter dem Begriff Solid?
20. Welche Booleschen Operationen können bei der Durchdringung von Solids angewandt werden?
21. Was ist der Vorteil von parametrischen Solids gegenüber gewöhnlichen Solids?
22. Was bringt die Anwendung von NURBS für die Konstruktion von Durchdringungskurven?