

4

Kurven und Flächen

4.1 Polyeder

Ein Körper, der von Ebenen begrenzt wird heißt *Polyeder*. Ein Polyeder heißt *konvex*, wenn

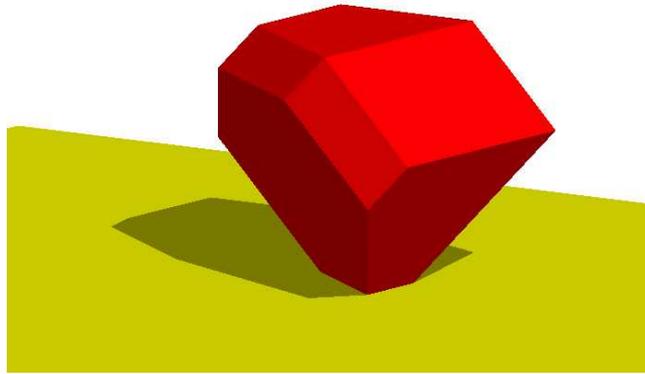


Abbildung 4.1: Polyeder

für jede Ebene durch eine Fläche gilt, dass das Polyeder ganz auf einer Seite der Ebene liegt, anderenfalls heißt das Polyeder *konkav*. Ein konvexes Polyeder ist auch dadurch gekennzeichnet, dass es keine Einsprünge hat. Abb.4.1 zeigt ein konvexes Polyeder, während in Abb.4.2 ein konkaves Sternpolyeder dargestellt ist.

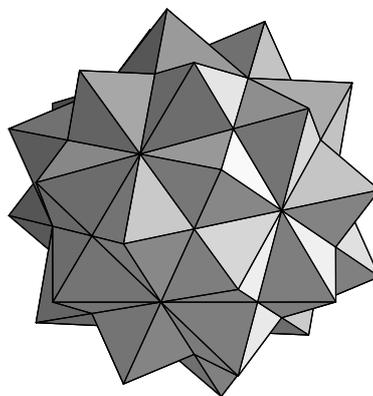


Abbildung 4.2: Konkaves Sternpolyeder

4.1.1 Reguläre Polyeder

Platonische Polyeder

Wenn das Polyeder aus lauter kongruenten Seitenflächen mit regelmäßigen Randpolygonen besteht und in jeder Ecke gleich viele Seitenflächen zusammenkommen, dann liegt ein *reguläres Polyeder* vor. Bei einem regulären Polyeder hat jede Polyederfläche die gleiche Eckenzahl p und durch jede Ecke geht die gleiche Anzahl von Polyederseiten q , wobei $p > 3$ und $q > 3$ gilt. Wir betrachten vorerst nur die konvexen regulären Polyeder. Dann gilt

Satz 4.1 *Konvexe reguläre Polyeder sind nur zu den folgenden fünf Zahlenpaaren (p, q) möglich: $(3, 3)$, $(3, 4)$, $(3, 5)$, $(4, 3)$, $(5, 3)$.*

Zum Beweis dieses Satzes folgen wir Euklid und zeigen die Konstruktion von regelmäßigen Polyedern, die aus lauter kongruenten regelmäßigen Flächen aufgebaut sind und keine einspringenden Kanten oder Flächen haben dürfen. Unter diesen Voraussetzungen beobachtete Euklid als erstes, dass die Summe der Flächenwinkel, die an einer Polyederecke zusammenkommen, kleiner als 360° sein muß. Nehmen wir als Beispiel den Würfel: in einer Ecke eines Würfels stoßen drei Quadrate zusammen, die Summe der Quadratwinkel bei dieser Ecke ist drei mal 90° , also 270° . Als nächstes bemerkte er, dass in einer Ecke eines regulären Polyeders mindestens drei Seitenflächen zusammenstoßen müssen. Mit diesen Vorbemerkungen können wir mit der gedanklichen Konstruktion der Polyeder beginnen. Als erstes nehmen wir dreieckige Flächen. Es gibt nur drei Möglichkeiten: Wir können drei, vier oder fünf Dreiecke nehmen und in einer Ecke zusammenstoßen lassen. Die Abbildung 4.8 zeigt diese drei Möglichkeiten. Man kann



Abbildung 4.3: Tetraeder

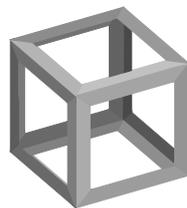


Abbildung 4.4: Würfel

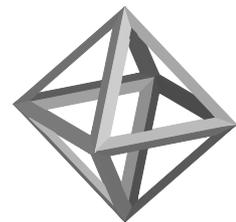


Abbildung 4.5: Oktaeder

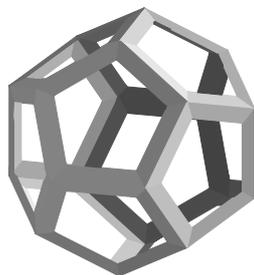


Abbildung 4.6: Dodekaeder

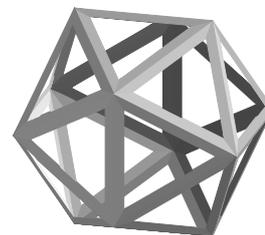


Abbildung 4.7: Ikosaeder

nun die drei Dreiecke zu einer dreiseitigen Pyramide zusammenfalten, ein viertes Dreieck an der Basis hinzufügen und hat das Tetraeder bekommen (Abb. 4.3). Vier Dreiecke können zu einer Pyramide mit einer quadratischen Basis gefaltet werden. Klebt man eine zweite vierseitige Pyramide an, so erhält man das Oktaeder (Abb. 4.5). Die fünf Dreiecke schließlich können zu einer fünfseitigen Pyramide gefaltet werden. Um diese Pyramide in ein regelmäßiges Polyeder

zu integrieren, gehen wir folgendermaßen vor: Wir konstruieren einen Streifen bestehend aus 10 gleichseitigen Dreiecken, von denen jeweils eines nach oben und eines nach unten zeigt (Abbildung 4.8 unten). Nun falten wir diese ebene Figur so, dass die oberen freien Seiten der Dreiecke auf ein Fünfeck zu liegen kommen. Automatisch ergibt sich, dass auch die anderen Seiten ein regelmäßiges Fünfeck bilden. Das so entstandene Polyeder nennt man ein fünfseitiges Antiprisma. Es ist leicht zu sehen, dass oben und unten auf dieses Antiprisma (Abbildung 4.9) die vorher konstruierte fünfseitige Pyramide aufgesetzt werden kann. Damit wurde das Ikosaeder erhalten (Abb. 4.7). Die Liste der regelmäßigen Polyeder, die Dreiecke als Seitenfläche haben, ist damit schon vollständig, denn wenn man sechs Dreiecke um einen Punkt der Ebene gruppiert, bleibt kein Spalt mehr frei zum Falten. Sechs Dreiecke füllen die Ebene rund um einen Punkt aus! Die nächste regelmäßige ebene Figur ist das Quadrat. Wir brauchen nach der zweiten Feststellung Euklids mindestens drei Quadrate, die um einen Punkt gruppiert sein müssen.

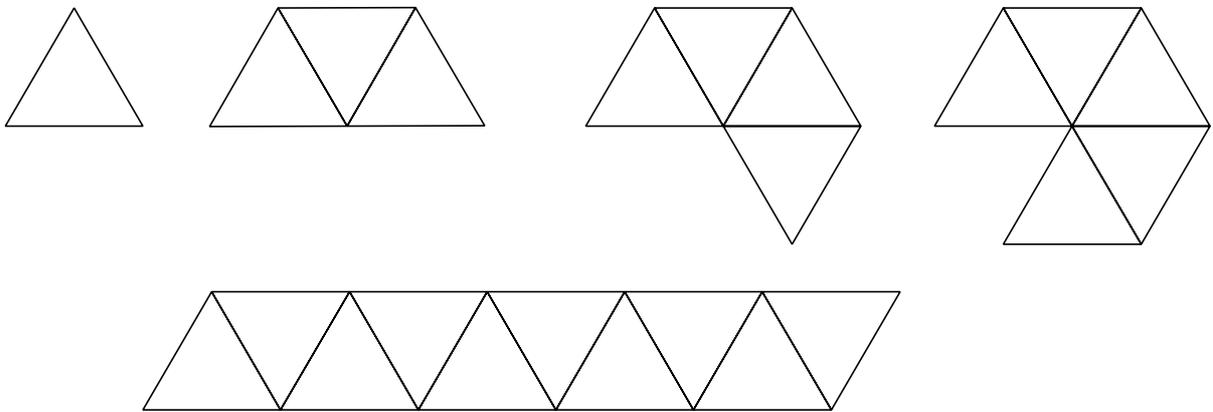


Abbildung 4.8: Eckenkonfigurationen

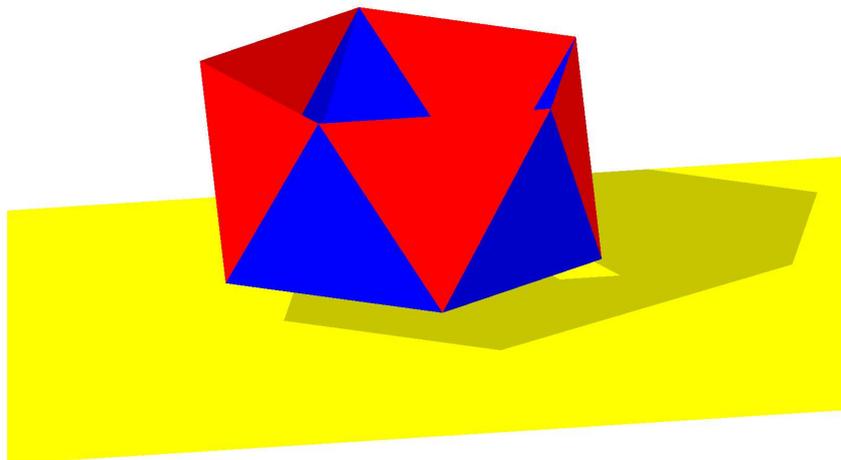


Abbildung 4.9: Antiprisma

Vier Quadrate sind schon zu viel, denn vier Quadrate füllen die Ebene rund um den Punkt aus. Es gibt daher nur ein regelmäßiges Polyeder mit Quadraten als Seitenflächen, das ist der

Würfel oder das Hexaeder (der Sechsfächner) wie ihn die Griechen nannten. Die nächste regelmäßige Figur ist das Fünfeck oder Pentagon. Gruppiert man drei davon um einen Punkt so bleibt gerade noch ein kleiner Spalt frei, dessen Öffnungswinkel 36° ist, wie man sich leicht überlegen kann. Da die Eckenwinkel eines Pentagons größer sind als die eines Quadrates, (nämlich genau 108°) können wir keine vier Fünfecke ohne Überlappung um einen Punkt in der Ebene gruppieren. Es gibt daher nur ein regelmäßiges Polyeder mit nur Fünfecken als Seitenflächen nämlich das Dodekaeder (Abb. 4.6). Die nächste regelmäßige Figur in der Ebene wäre das Sechseck. Die Eckenwinkel bei einem Sechseck sind aber 120° , womit drei Sechsecke bereits die Ebene rund um einen Punkt ausfüllen. Man kann die drei Sechsecke nicht mehr falten, weil kein Spalt mehr freibleibt. Es gibt daher kein regelmäßiges Polyeder mit Sechsecken als Seitenflächen. Bei den nun folgenden regelmäßigen Figuren werden die Eckenwinkel immer größer, sodass z.B. drei Siebenecke rund um einen Punkt bereits Überlappungen haben und daher auf keinen Fall mehr zu einer räumlichen Ecke gefaltet werden können. Damit sind wir mit dem Beweis fertig. Es gibt also (unter der Voraussetzung, dass keine einspringenden (konkaven) Kanten erlaubt sind) genau fünf Polyeder mit deckungsgleichen regelmäßigen Seitenflächen und kongruenten Eckenfiguren.

Die geometrischen Daten der fünf konvexen regulären Polyeder, die auch platonische Polyeder genannt werden, sind in Tabelle 4.1 zusammengestellt.

Polyeder	p	q	Ecken e	Flächen f	Kanten k
Tetraeder	3	3	4	4	6
Oktaeder	3	4	6	8	12
Ikosaeder	3	5	12	20	30
Würfel	4	3	8	6	12
Dodekaeder	5	3	20	12	30

Tabelle 4.1: Platonische Polyeder

Reguläre Polyeder haben folgende Eigenschaften:

- Es existiert eine Umkugel, die alle Ecken des Polyeders enthält (Abb.4.10).
- Es existiert eine Kantenmittenkugel, die alle Kantenmittelpunkte des Polyeders enthält (Abb.4.11).
- Es existiert eine Inkugel, die alle Flächenmittelpunkte des Polyeders enthält (Abb.4.12).

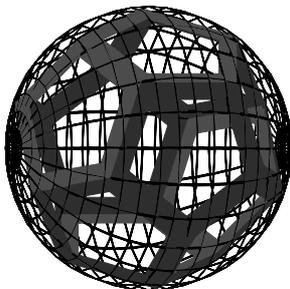


Abbildung 4.10: Dodekaeder mit Umkugel

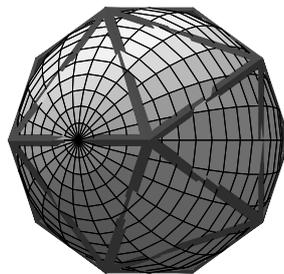


Abbildung 4.11: Ikosaeder mit Kantenmittenkugel

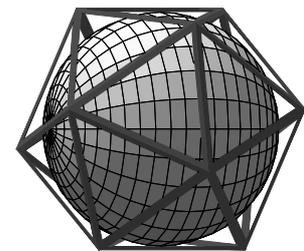


Abbildung 4.12: Ikosaeder mit Inkugel

- Wie man aus der Tabelle 4.1 entnehmen kann, hat z.B. das Oktaeder gleich viele Ecken wie der Würfel Seitenflächen und umgekehrt hat der Würfel gleich viele Ecken wie das Oktaeder Seitenflächen. Gleiche geometrische Eigenschaften haben Dodekaeder und Iksaeder. Diese Eigenschaften werden im folgenden Satz zusammengefasst:

Satz 4.2 *Zu jedem regulären Polyeder P existiert ein dazu duales reguläres Polyeder P^* , dessen Ecken die Mittelpunkte der Seitenflächen von P sind und dessen Kanten die Verbindungen derjenigen Ecken sind, die in benachbarten Seiten von P liegen. Die Inkugel von P ist die Umkugel von P^* . Zueinander dual sind Würfel und Oktaeder sowie Dodekaeder und Iksaeder. Das Tetraeder ist selbstdual.*

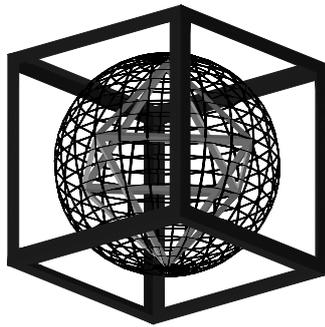


Abbildung 4.13: Dualität Würfel-Oktaeder

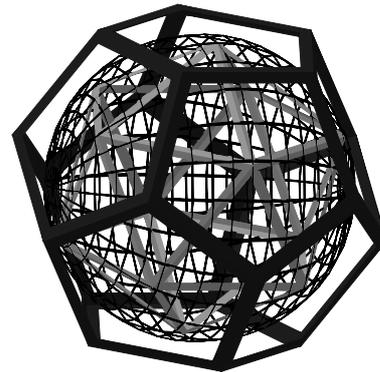


Abbildung 4.14: Dualität Dodekaeder-Iksaeder

Sternpolyeder

Lässt man die Forderung der Konvexität fallen, so erhält man noch vier weitere reguläre Polyeder. Zwei von ihnen, nämlich das Große Sterndodekaeder und das Kleine Sterndodekaeder wurden von J. KEPLER 1615 und die restlichen beiden, nämlich das Große Iksaeder und das Große Dodekaeder wurden von L. POINSOT 1809 entdeckt (Abb. 4.15–4.18).

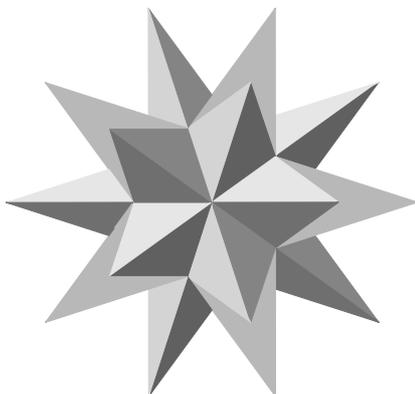


Abbildung 4.15: Großes Sterndodekaeder

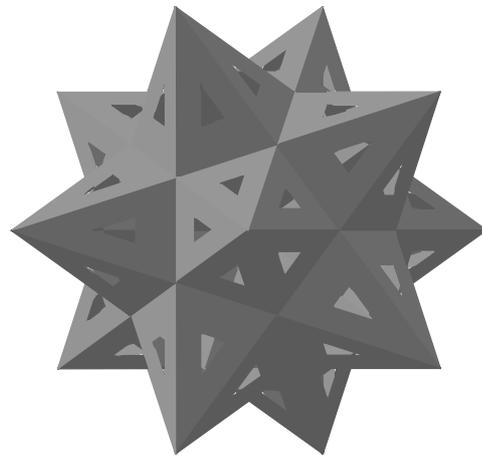


Abbildung 4.16: Kleines Sterndodekaeder

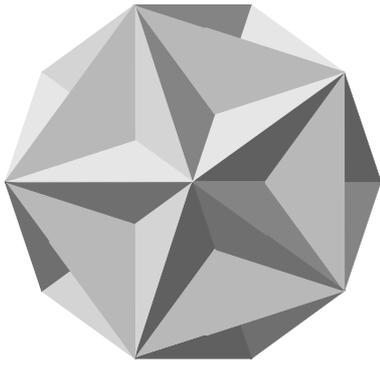


Abbildung 4.17: Großes Dodekaeder

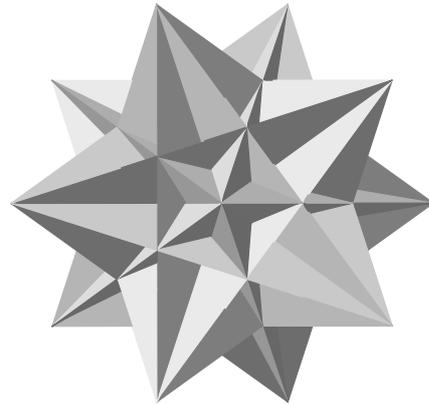


Abbildung 4.18: Großes Ikosaeder

4.1.2 Der Eulersche Polyedersatz

Wie man mit Hilfe der Tabelle 4.1 leicht überprüfen kann, gilt für alle konvexen regulären Polyeder $e + f - k = 2$. Gleiches gilt auch für Prismen, Pyramiden und Antiprismen. Die Gleichung ist aber nicht für alle Polyeder richtig. Dies kann man z.B. an dem in Abb.4.19 dargestellten "Ruprechtswürfel" feststellen. Dieses Polyeder entsteht durch die von RUPRECHT VON DER

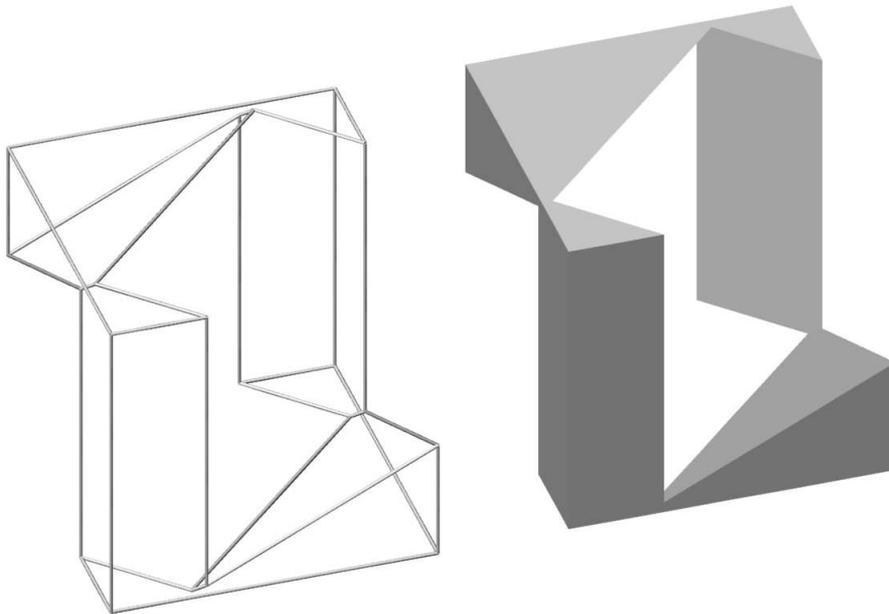


Abbildung 4.19: Ruprechtswürfel

PFALZ (1619-1682) gestellte Aufgabe einen Würfel so zu durchbohren, dass ein kongruenter Würfel durch die Bohrung hindurchgeschoben werden kann und der Restkörper nicht zerfällt. Der bei dieser Aufgabe entstehende Restkörper besitzt 20 Ecken, 10 Flächen und 30 Kanten womit sich ergibt: $e + f - k = 20 + 10 - 30 = 0$. Worin besteht der Unterschied zwischen den oben angeführten Polyedern und dem Ruprechtswürfel? Dies wird klar nachdem wir den von L. EULER (1707-1783) gefundenen Satz formuliert haben:

Satz 4.3 Für jedes konvexe Polyeder gilt: $e + f - k = 2$

Wir verzichten auf einen Beweis.¹ Die Zahl $\chi = e + f - k$ heißt *Euler Charakteristik* des Polyeders. Gleiches χ kennzeichnet topologisch äquivalente Polyeder. χ ist für alle nicht konvexen Polyeder gleich 2, welche topologisch der Kugel äquivalent sind. Man sieht leicht, dass der Ruppertwürfel dem Torus topologisch äquivalent ist. Die Eulercharakteristik der Tori mit einem Loch ist daher 0.

4.1.3 Halbreguläre Polyeder

Indem man die im vorigen Abschnitt zur Konstruktion der regulären Polyeder aufgestellten Voraussetzungen lockert bekommt man noch eine ganze Reihe von weiteren interessanten Polyedern. Ein Polyeder heißt *halbregulär*, wenn erstens alle Flächen reguläre (nicht notwendig kongruente) Polygone und die Eckenfiguren kongruent sind und zweitens alle Flächen kongruent und alle Eckenfiguren regulär sind. Ganz offensichtlich sind die beiden Fälle zueinander dual. Der erste Fall umfasst die *Archimedischen Polyeder* und der zweite Fall beschreibt die *Catalanschen Polyeder*. Die Archimedischen Polyeder haben unterschiedliche reguläre Polygone als Seitenflächen aber die Eckenfiguren müssen kongruent sein. Als Beispiel sei das *Abgestumpfte Ikosaeder* betrachtet. Man erhält es aus dem Ikosaeder durch die folgende Konstruktion: Man wählt auf jeder Ikosaederseite zwei Punkte die diese Seite genau dritteln. Dann legt man durch die einer Ecke benachbarten Teilungspunkte eine Schnittebene und schneidet die Fläche ab (Abb.:4.20–4.21).

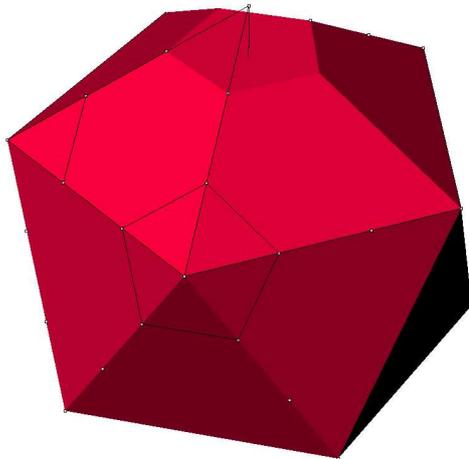


Abbildung 4.20: Konstruktion des Abgestumpften Ikosaeders

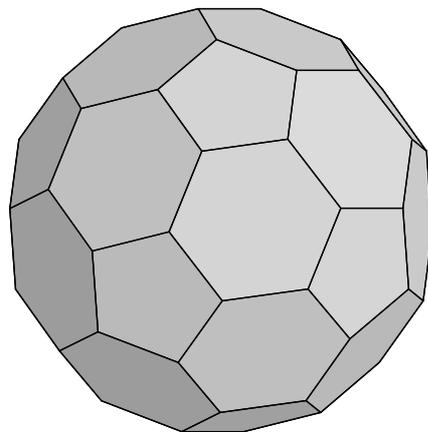


Abbildung 4.21: Abgestumpftes Ikosaeder

Führt man dies für jede Ecke durch, so erhält man ein Polyeder mit zwei verschiedenen Flächentypen, nämlich durch das Abschneiden der fünfseitigen Pyramiden ergeben sich reguläre Fünfecke und in den alten Flächen des Ikosaeders verbleiben Sechsecke. Die Eckenfiguren sind kongruent, es kommen in jeder Ecke genau zwei Sechsecke und ein Fünfeck zusammen. Wie man leicht abzählen kann, hat das abgestumpfte Ikosaeder insgesamt 32 Flächen, 60 Ecken und 90 Kanten. Das abgestumpfte Ikosaeder hat auch eine praktische Bedeutung. Es wird gerne für Fußbälle verwendet. Das zugehörige (dualarchimedische) Catalansche Polyeder ist in Abb.4.22 zu sehen. Es besteht aus lauter kongruenten Dreiecken, die aber nicht mehr regulär sind. Die Eckenfiguren sind entweder reguläre sechseitige Pyramiden oder reguläre fünfseitige Pyramiden.

¹Einen recht elementaren Beweis findet man z.B. in Brauner, Konstruktive Geometrie, S. 202.

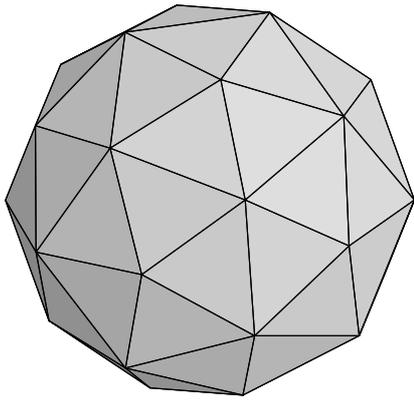


Abbildung 4.22: Duales abgestumpftes Ikosaeder (Pentakisidodekaeder)

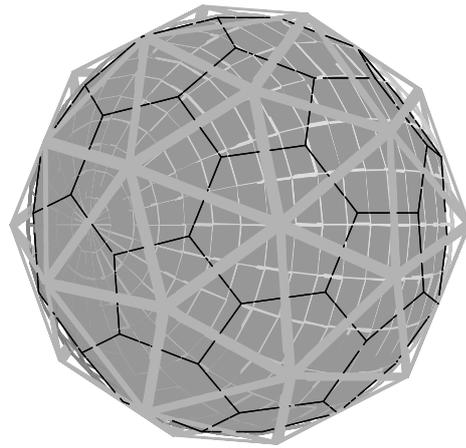


Abbildung 4.23: Abgestumpftes Ikosaeder und Pentakisidodekaeder

Wir beenden damit diesen Abschnitt, nicht ohne den Hinweis, dass damit nur ein ganz kleiner Ausschnitt aus dem reichhaltigen Gebiet der Polyeder aufgezeigt wurde. Der/die interessierte StudentIn sei auf die Internetseite <http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/vp.html> hingewiesen, in der noch viele weitere Typen von Polyedern behandelt werden.

4.2 Grundlagen krummer Flächen

Im Folgenden werden einige Begriffe präzisiert, die wir bereits in den vorangehenden Kapiteln verwendet haben, und einige weitere neu definiert. Ausgangspunkt unserer Überlegungen ist der anschauliche Begriff einer *krummen Fläche* Φ wie sie in der Erfahrungswelt als glatte Oberfläche eines Körpers vorkommt. Etwas genauer ist eine Fläche Φ eine zweifach ausgedehnte Menge von Punkten. In der Ingenieurswelt werden dabei zwei Arten von Flächen unterschieden

- Gesetzmäßige Flächen
- Empirische Flächen

Empirische Flächen: Empirische Flächen sind meist durch eine gewisse Anzahl von Datenpunkten oder Meßpunkten gegeben. Sie können aber auch durch eine Zeichnung gegeben sein, die aus einer Anzahl von charakteristischen Linien besteht (z.B. Höhenschichtenlinien einer Geländefläche). Heute werden empirische Flächen fast ausschließlich durch gewisse geometrisch-mathematische Algorithmen in gesetzmäßige Flächen übergeführt und durch diese approximiert. Ein Beispiel für ein derartiges Vorgehen haben wir im Abschnitt über die Triangulation kennengelernt, wo wir aus einer Anzahl von Datenpunkten unter Zuhilfenahme eines geometrischen Algorithmus (z.B. "kürzeste Diagonale") eine Interpolationsfläche hergestellt hatten.

Gesetzmäßige Flächen: Diese Flächen sind durch eine mathematische oder geometrische Definition erklärt (z. B. "Die Kugel ist der Ort aller Punkte, die von einem festen Punkt, dem Mittelpunkt konstanten Abstand haben"). Eine solche geometrische Definition kann dann durch

Einführung von Koordinaten in eine mathematische Gleichung übergeführt werden ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, vgl. "Mathematisches Denkebn").

Eine wichtige Untermenge der gesetzmäßigen Flächen sind die *algebraischen Flächen*. Sie können durch eine implizite Gleichung von der Form

$$F(x, y, z) \equiv \sum_{i,j,k \geq 0} a_{ijk} x^i y^j z^k = 0, \quad i, j, k \geq 0 \text{ ganze Zahlen, } a_{ijk} \text{ konstante Koeffizienten} \quad (4.1)$$

mit den drei Unbekannten beschrieben werden. Alle Koordinatentripel (x, y, z) , die die Gleichung 4.1 erfüllen stellen Punkte dar, die auf der Fläche liegen. $F(x, y, z)$ ist ein *Polynom*. Die höchste Exponentensumme $i + j + k = n$, die in Gleichung 4.1 auftritt heißt der *Grad* des Polynoms und gleichzeitig die *Ordnung* der Fläche. Diese Zahl ist eine *Invariante* der Fläche, d.h. sie ist unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems. Eine Fläche heißt *irreduzibel*, wenn sich das Polynom F nicht in Faktoren zerlegen läßt. Ist das Polynom reduzibel, dann zerfällt die Fläche in zwei oder mehrere Teile von niedrigerer Ordnung. Die geometrische Bedeutung des Begriffes der Flächenordnung wird anhand von einigen Aussagen klar, die unschwer zu beweisen wären (Beweise etwa in Wunderlich: DG I, S.97ff.):

- Eine algebraische Fläche n -ter Ordnung wird von einer Geraden g allgemeiner Lage in n Punkten geschnitten (g darf nicht zur Gänze auf der Flächen liegen und die Schnittpunkte sind im Sinne der algebraischen Wurzelziehung zu verstehen; es können dabei auch komplexe Schnittpunkte vorkommen).
- Eine irreduzible algebraische Fläche der Ordnung n wird von jeder Ebene nach einer algebraischen Kurve der Ordnung n geschnitten.

Beispiel 4.1 Die algebraischen Flächen 1.Ordnung ($n = 1$) sind nach 4.1 durch

$$a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z = 0 \quad (4.2)$$

gegeben. Durch die Wahl $a_{000} = 3, a_{100} = 2, a_{010} = -5, a_{001} = 3$ erhalten wir die Ebene $3 + 2x - 5y + 3z = 0$; oder durch die Wahl $a_{000} = a_{100} = a_{010} = 0, a_{001} = 1$ die Ebene $z = 0$, die Grundrissebene. Die algebraischen Flächen 2. Ordnung sind durch

$$a_{000} + a_{100}x + a_{010}y + a_{001}z + a_{200}x^2 + a_{020}y^2 + a_{002}z^2 + a_{110}xy + a_{101}xz + a_{011}yz = 0 \quad (4.3)$$

gegeben. Diese Flächen werden auch **Quadriken** genannt. Einige Flächen aus dieser Familie spielen bedeutende Rollen im Bauwesen und anderen technischen Disziplinen. Wir werden sie in den folgenden Kapiteln ausführlich besprechen.

Sei nun eine Fläche Φ durch eine implizite (nicht notwendigerweise algebraische!) Gleichung $F(x, y, z) = 0$ gegeben. Wenn in einem Flächenpunkt $P \subset \Phi$ die partiellen Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ der Flächengleichung nicht alle gleichzeitig verschwinden, dann heißt P ein *regulärer Punkt* von Φ . Die Tangentialebene an die Fläche ist dann durch

$$\frac{\partial F}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z - z) = 0 \quad (4.4)$$

gegeben. Die normale Gerade auf die Tangentialebene im Berührungspunkt heißt *Flächennormale* n von Φ .

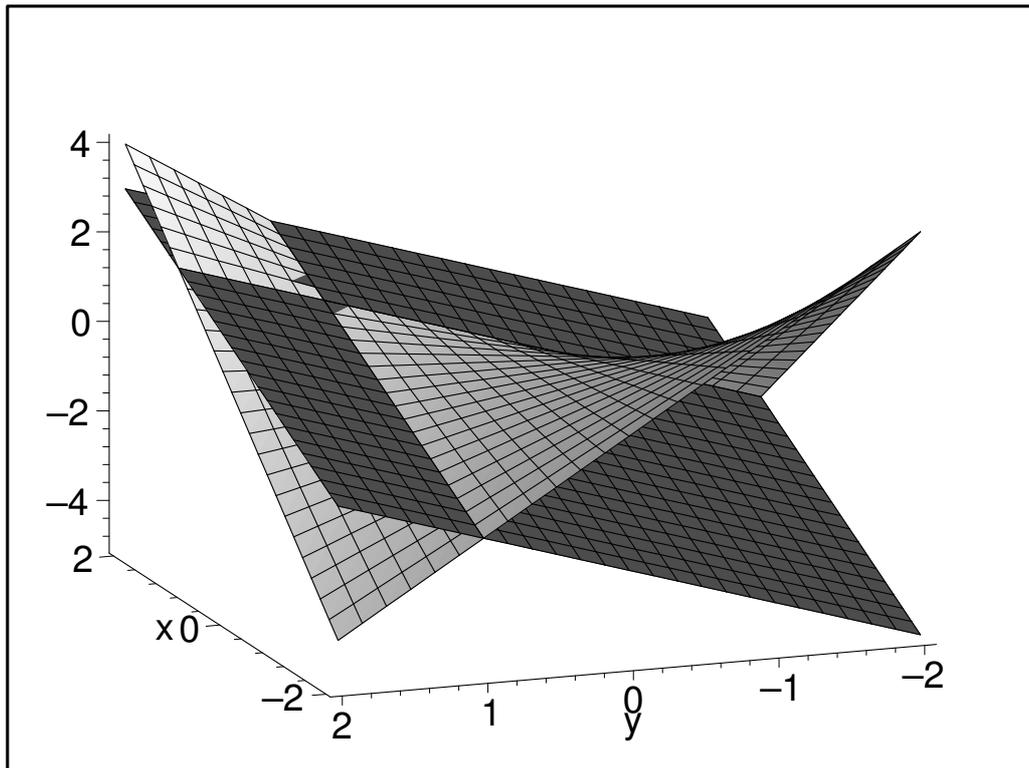


Abbildung 4.24: Hyperbolisches Paraboloid mit Tangentialebene

Beispiel 4.2 Gegeben ist die Fläche 2. Ordnung $F \equiv xy - z = 0$. Man berechne die Tangentialebene im Punkte $P(1,1,z)$ und plote Fläche und Tangentialebene. Die Fläche ist ein hyperbolische Paraboloid (das war auch die Fläche die durch lineare Interpolation von vier windschiefen Geraden entsteht; vgl. Kapitel über Bezierflächen!). Die Fläche wird in Abb. 4.24 mit ihrer Tangentialebene dargestellt. Man beachte, dass die Tangentialebene keineswegs auf einer Seite der Fläche liegen muss, sondern die Fläche sogar schneiden kann!

Aus der Flächengleichung ergibt sich sofort für den Punkt P die z -Koordinate 1. Die partiellen Ableitungen sind der Reihe nach $\frac{\partial F}{\partial x} = y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$. damit erhalten wir nach 4.4 die Tangentialebenen

$$y(X - x) + x(Y - y) - (Z - z) = 0$$

und durch Einsetzen der Koordinaten von P ergibt sich die Tangentialebene

$$X - 1 + Y - 1 - (Z - 1) = 0 \Rightarrow X + Y - Z - 1 = 0$$

Beispiel 4.3 Gegeben ist die Fläche 2. Ordnung $F \equiv x^2 + y^2 + 4z^2 - 1 = 0$. Man berechne die Tangentialebene im Punkte $P(0, 0, \frac{1}{2})$ und plote Fläche und Tangentialebene.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \end{aligned}$$

Damit erhalten wir nach 4.4 die Tangentialebene

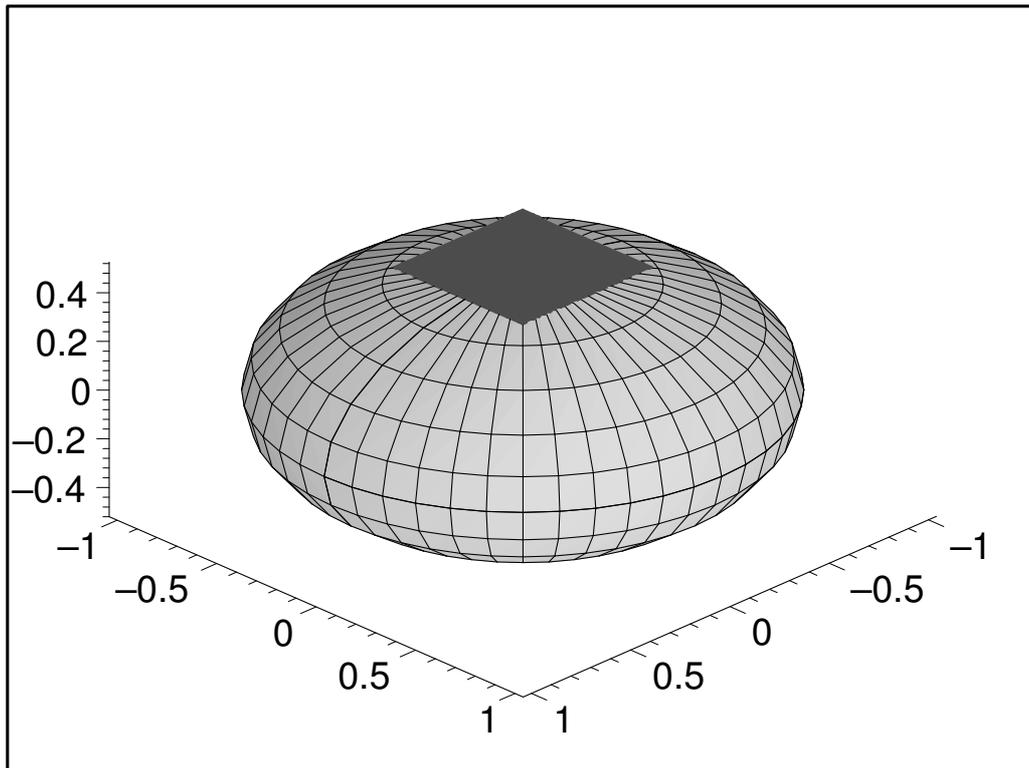


Abbildung 4.25: Ellipsoid mit Tangentialebene

4.3 Umriss einer Fläche

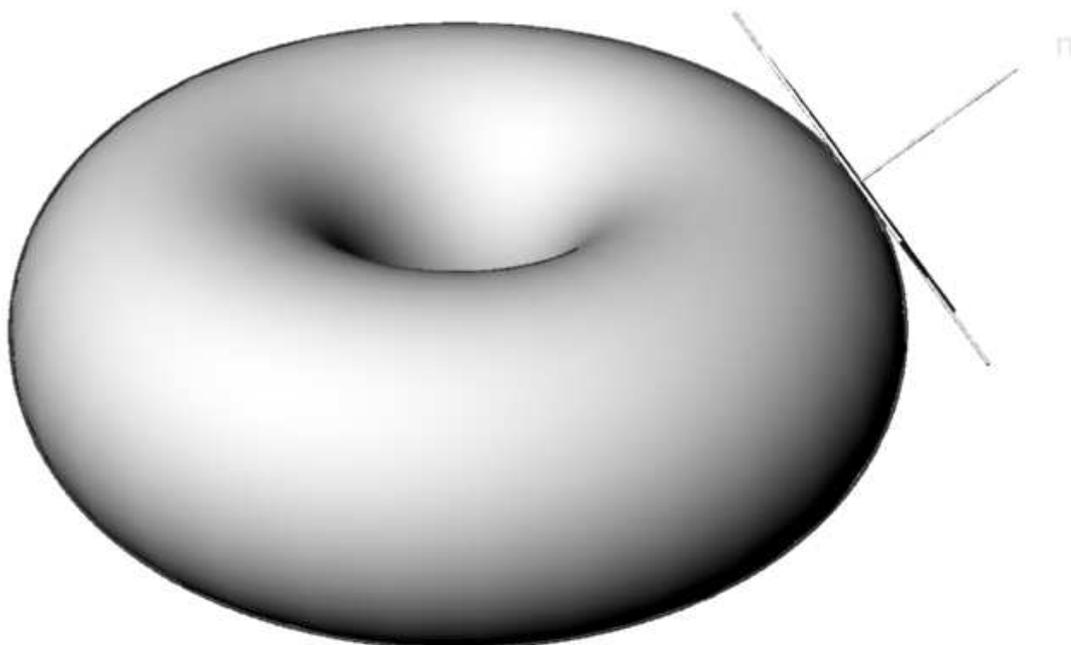


Abbildung 4.26: Umriss einer Fläche

Wenn eine Fläche Φ auf eine Bildebene projiziert wird, so wird es gewisse Sehstrahlen geben, die die Fläche berühren. Bei einer Parallelprojektion bilden diese Sehstrahlen einen Zylinder ζ , bei einer Zentralprojektion einen Kegel χ . Die Berührungspunkte von ζ (bzw. χ) und Φ bilden auf Φ eine Kurve u , die man *Kontur* der Fläche bezüglich der Parallelprojektion nennt. In

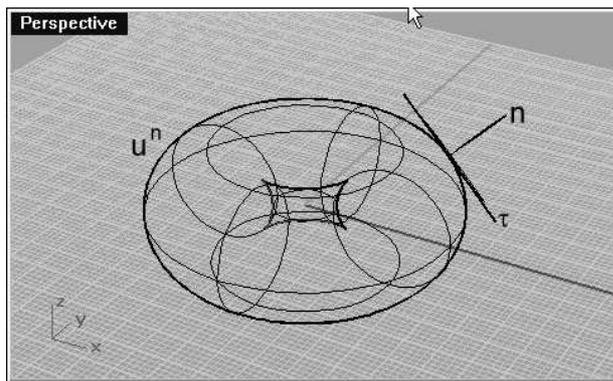
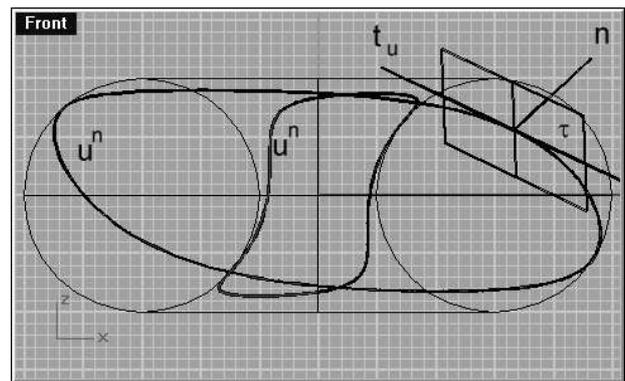
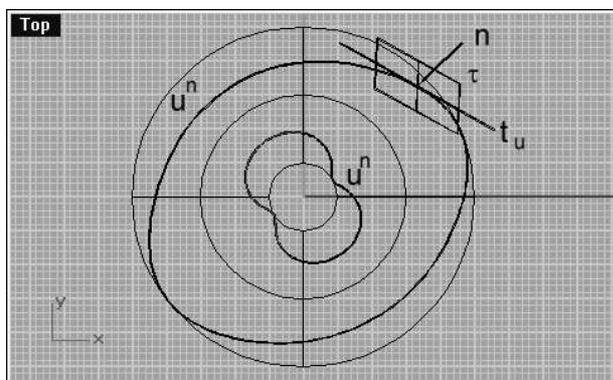
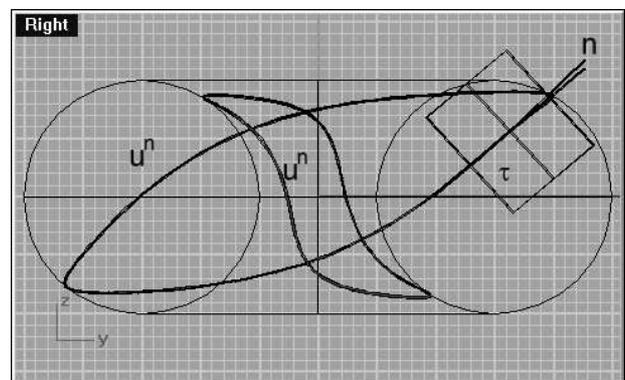


Abbildung 4.27: Kontur der Fläche (Axonometrie)

Abbildung 4.28: Kontur u^n der Fläche (Aufriss)Abbildung 4.29: Kontur u^n der Fläche (Grundriss)Abbildung 4.30: Kontur u^n der Fläche (Seitenriss)

den Konturpunkten sind die Tangentialebenen der Fläche projizierend. In diesen Punkten tritt im Bild der rechte Winkel zwischen der Tangentialebene und der Flächennormalen in wahrer Größe auf! Das Bild u^p (bzw. u^n bei Normalprojektion) von u nennt man den Umriss von Φ in Bezug auf die Parallelprojektion. Abbildung 4.26 zeigt ein gerendertes Bild einer Fläche bei der auch in einem Konturpunkt die projizierende Tangentialebene eingezeichnet ist. Abb. 4.27 zeigt dieselbe axonometrische Ansicht ohne Rendering. Hier ist eine weitere wichtige Eigenschaft des Umrisses deutlich zu erkennen: Die eingezeichneten Flächenkurven c berühren den Umriss der Fläche. Im Raum hingegen schneiden sie die Kontur. Diese Schnittpunkte werden *Konturpunkte* U genannt. Die Bilder U^n der Konturpunkte heißen *Umrisspunkte*. In U^n fallen die Tangenten von u^n und c^n zusammen, weil sie ja beide in der projizierenden Tangentialebene liegen.²

Hat die Kontur u Tangenten in Projektionsrichtung, dann hat der Umriss *Spitzen*. Im gegebenen Beispiel treten vier Spitzen auf (Abb. 4.27). Man beachte dass die Kontur u selbst keine Spitzen hat (Abb. 4.28, 4.29, 4.30).

²einzige Ausnahme: die Kurve c hat eine Tangente in Sehstrahlrichtung, dann sitzt sie im Bild mit einer Spitze am Umriss auf.

4.4 Dreh-, Rohr-, Kanal- und Kreisflächen

4.4.1 Drehflächen (Rotationsflächen)

Unterwirft man eine Kurve k einer stetigen Drehung um eine Gerade a , so entsteht eine *Drehfläche* Φ . Die Drehkreise der einzelnen Punkte von k heißen *Breitenkreise*, die Schnittkurven von Φ mit Ebenen durch a werden *Meridiane* genannt. Alle Meridiane einer Drehfläche sind untereinander kongruent.

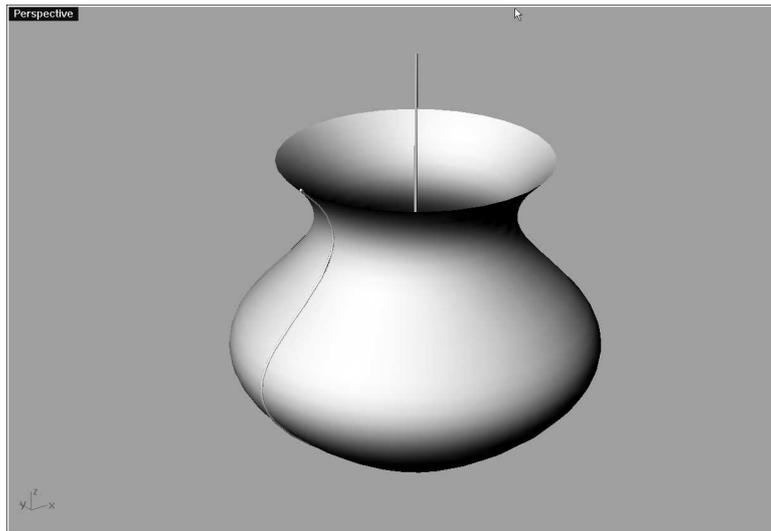


Abbildung 4.31: Drehfläche

Die konstruktive Behandlung von Drehflächen erfolgt zweckmäßig in einem Normalriss in dem die Drehachse als Hauptgerade erscheint. Eine Meridianebene ist dann Hauptebene, erscheint unverzerrt und wird als *Hauptmeridianebene* bezeichnet. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir a erstprojizierend und bezeichnen den Meridian m in der zu π_2 parallelen Ebene durch a als *Hauptmeridian* und die Trägerebene μ von m als *Hauptmeridianebene*; m ist dann die 2. Kontur und da m in der Bildebene liegt auch gleichzeitig der 2. Umriss. Kontur für die Projektion auf die Grundrissebene sind alle jene Breitenkreise in deren Punkten die Tangenten an den Meridian parallel zur Achse sind. Dies sind insbesondere der *Kehlkreis* u_1 (Breitenkreis mit kleinstem Radius) und der *Äquator* (Breitenkreis mit maximalem Radius). Parallelkreise mit mit achsennormalen Meridiantangenten sollen *Plattkreise* heißen. Abb. 4.31 zeigt die durch Drehung der Kurve k um die Achse a entstehende Drehfläche Φ in einer gerenderten Axonometrie.

Bei der konstruktiven Behandlung von Drehflächen sind zwei Grundkonstruktionen wichtig (Abb.4.32):

1. Die Vervollständigungs Aufgabe:

Gegeben ist der Grundriss P' oder der Aufriss P'' eines Drehflächenpunktes P . Gesucht sind die jeweils anderen Risse P'' oder P' . Ist P'' gegeben, so zeichne den Ordner durch P'' und auch den Parallelkreis k'' durch P'' . Die Schnittpunkte von k'' (Kreis um a' mit Radius r von k'') mit dem Ordner durch P'' sind die möglichen Lagen von P' (P' oder \bar{P}'). Die Lösung der Aufgabe ist also zweideutig. Falls ein Punkt auf einer Drehfläche im Aufriss gegeben ist, so muss zur eindeutigen Lösung vermerkt sein, ob er vor oder hinter der Hauptmeridianebene liegt. Ist der Grundriss P' gegeben, so bestimmt man den Radius r des Breitenkreises durch P' und passt diesen durch Zeichnen von Ordnern im Aufriss

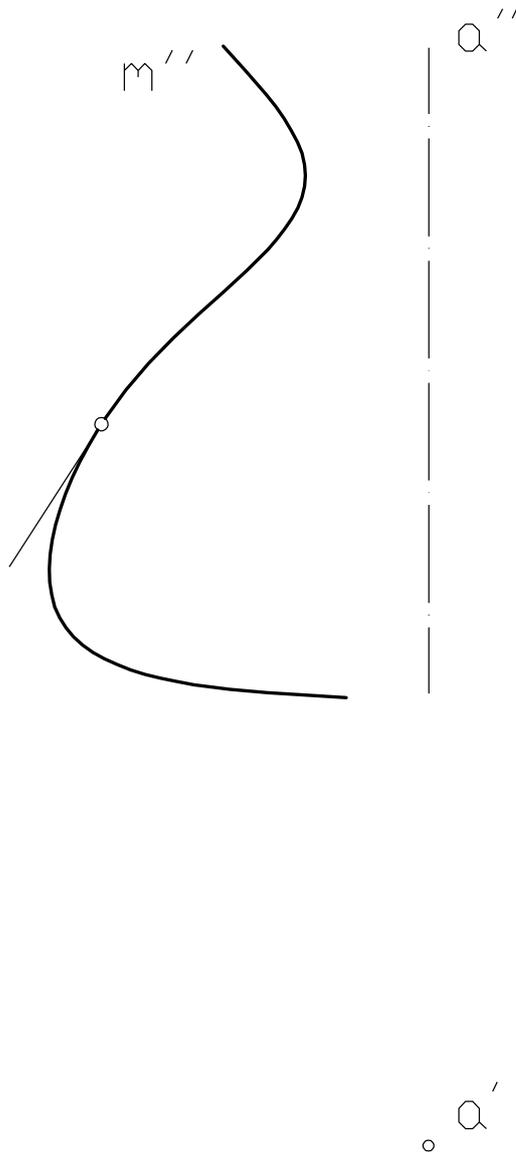


Abbildung 4.32: Grundkonstruktionen an Drehflächen

ein. Im allgemeinen wird es auch hier mehrere Lösungen geben. Eindeutigkeit kann nur durch zusätzliche Angaben erreicht werden.

2. Flächennormale in einem Punkt P :

Die Konstruktion der Flächennormalen in einem Punkt P einer Drehfläche ist besonders einfach. Den allgemeinen Fall zeigt die Abb.4.32: Drehe P'' bis in den Hauptmeridian m'' ; P_0'' sei die Endlage. Die Flächennormale n_0'' in P_0'' ist senkrecht zur Hauptmeridiantangente. Ist $N_0'' = a'' \cap n_0''$, so ist N_0'' ein Fixpunkt bei dieser Drehung, d.h. die Flächennormale n

des Punktes P läuft ebenfalls durch N_0 und kann damit in beiden Rissen sofort gezeichnet werden. Wir bemerken noch, dass N_0 gleichzeitig der Mittelpunkt jener Kugel ist, die der Drehfläche längs k einbeschrieben werden kann.

4.4.2 Rohrflächen

Unter einer *Rohrfläche* versteht man das *Hüllgebilde einer einparametrisigen Schar kongruenter Kugeln*. Um eine Rohrfläche anzugeben braucht man die Ortsline der Kugelmittelpunkte (*Mittenkurve oder spine curve*) und den Kugelradius (Rohrradius) a . Wenn die Mittenkurve eine Gerade ist, dann ist die Rohrfläche ein Drehzylinder. Eine allgemeine Rohrfläche zeigt Abb.4.33. Eine Rohrfläche kann Selbstüberschneidungen haben. Dies tritt genau dann auf, wenn der Krümmungsradius der Mittenkurve kleiner ist als der Radius a der erzeugenden Kugeln. Jede Kugel berührt die Rohrfläche längs eines Kreises, der in der Normalebene der Mittenkur-

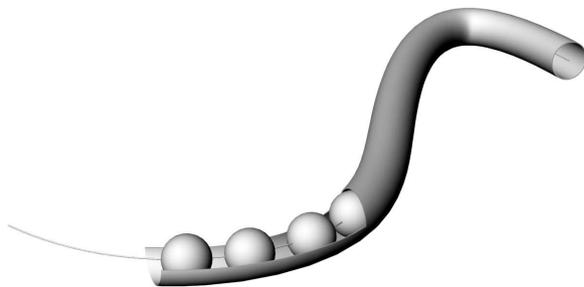


Abbildung 4.33: Rohrfläche

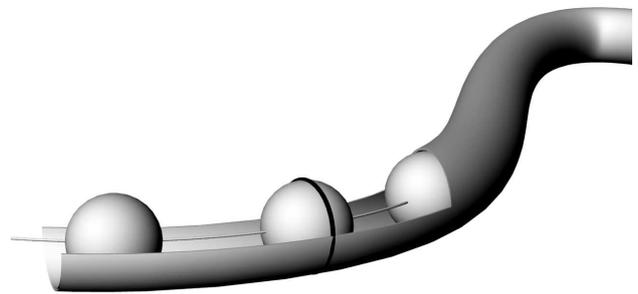


Abbildung 4.34: Rohrfläche Charakteristik

ve liegt. Man nennt diesen Berührungskreis *Charakteristik* (Abb.4.34). Rohrflächen gehören zu den sogenannten *Bewegflächen*, weil sie durch Bewegung eines Kreises erzeugt werden können. Die Bewegung ist dabei die Bewegung des begleitenden Dreiecks der Mittenkurve.

Die Erzeugung einer Rohrfläche erlaubt eine einfache Ermittlung des Umrisses bei Normalprojektion. Man beginnt mit der Darstellung der *Mittenkurve* m^n . Zu jeder Lage des Mittelpunktes M auf m^n kann die dazugehörige Berührungskugel gezeichnet werden. Alle diese Kugeln von gleichem Radius berühren die Fläche; die Hüllkurve ihrer Bilder ist also der Umriss der Rohrfläche. Mit dieser Methode wurden in Abb. 4.35 zur Normalprojektion einer Mittenkurve m^n die Berührungskugeln eingezeichnet. Praktisch ist diese Methode aber nicht sinnvoll, denn man erhält ersichtlich diese Kurve auch, wenn man auf den Normalen von m^n nach beiden Seiten hin konstante Strecken abträgt. Damit besteht die Umrisskurve u^n aus zwei Parallelkurven des Normalrisses von m^n , des Bildes der Mittenkurve. Unter einer *Parallelkurve* versteht man eine Kurve, die in jedem Punkt von einer vorgegebenen Kurve konstanten (Normal)Abstand hat. Abb. 4.36 zeigt zwei Kurven c_2 und c_3 die Parallelkurven zu c_1 sind. Parallelkurven haben gemeinsame Normalen. Dies wird in den Punkten P_1 , P_2 und P_3 gezeigt. Die Hüllkurve aller Normalen einer Parallelkurvenschar heißt *Evolute* e . Sie ist der Ort aller Krümmungsmittelpunkte der Parallelkurvenschar. Der Krümmungsmittelpunkt K ist daher Krümmungsmittelpunkt für alle drei Kurven c_1 , c_2 und c_3 in den Punkten P_1 , P_2 , P_3 auf der Normalen n . Beim Zeichnen kann man daher die wesentliche Eigenschaft von Parallelkurven benutzen, dass sie eine gemeinsame Evolute besitzen. Parallelkurven sind in CAD-Systemen unter dem Namen "offset curve" bzw. in AutoCad durch den Befehl `versetzen` implementiert.

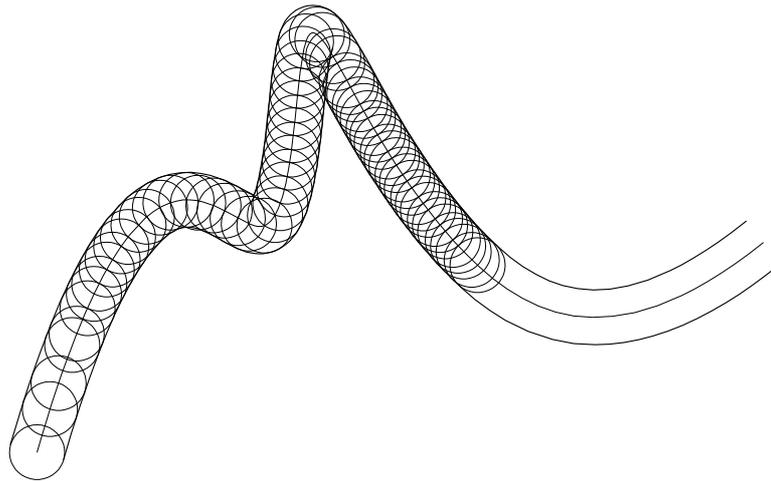


Abbildung 4.35: Normalumriss einer Rohrfläche

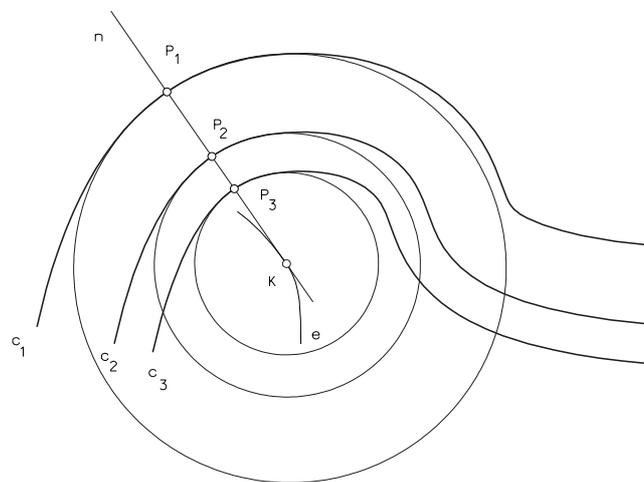


Abbildung 4.36: Parallelkurven

4.4.3 Der Torus, eine spezielle Dreh- und Rohrfläche

Definition: Wird ein Kreis m um eine Achse a gedreht, die in der Kreisebene liegt, aber nicht durch den Kreismittelpunkt läuft, so entsteht eine Drehfläche, welche *Torus* heißt. Je nach der Lage von m zur Drehachse tritt der Torus in 3 Formen auf (Abb. 4.37):

1. m schneidet a nicht reell ... Ringtorus
2. m berührt a Dorntorus
3. m schneidet a Spindeltorus

Man kann in allen 3 Fällen sofort die Flächengleichung aus dem Meridiankreis ermitteln: $m \dots (y - b)^2 + z^2 = a^2 \Rightarrow (\sqrt{x^2 + y^2} - b)^2 + z^2 = a^2$. Nach dem Quadrieren erhält man die Torusgleichung zu

$$(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 - a^2)^2 = 4b^2(x^2 + y^2) \tag{4.5}$$

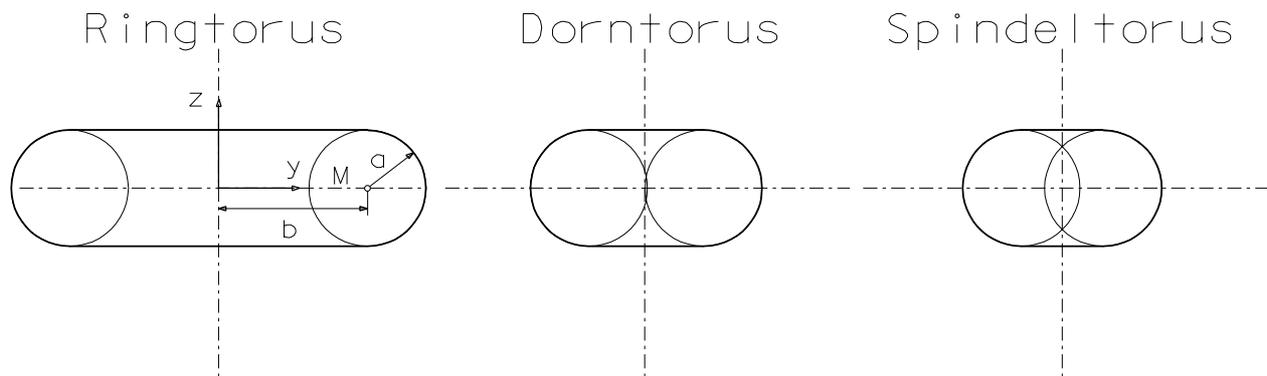


Abbildung 4.37: Torusformen

Soll eine Parameterdarstellung des Torus berechnet werden, so erhalten wir mit der Parameterdarstellung des Meridiankreises m : $\{x_0 = 0, y_0 = b + a \cos v, z_0 = a \sin v\}$

$$\begin{aligned} x &= -\sin u(b + a \cos v) \\ y &= \cos u(b + a \cos v) \\ z &= a \sin v \end{aligned} \quad (4.6)$$

Der Torus gestattet noch eine zweite Erzeugung: Dem Torus können ∞^1 Kugeln mit gleichem Radius einbeschrieben werden, die ihn jeweils längs eines Meridiankreises berühren. Der Torus ist also Hüllfläche von Kugeln gleicher Größe und damit eine Rohrfläche. Der Torus ist aber eine spezielle Rohrfläche nämlich eine Drehrohrfläche. Diese Erzeugung erlaubt eine einfache Ermittlung des Umrisses bei Normalprojektion, auch bei allgemeiner Lage der Drehachse. Man beginnt mit der Darstellung des *Mittlenkreises* o (das ist der Bahnkreis von M bei der Drehung um die Achse). o^n ist bei Normalprojektion eine Ellipse. Zu jeder Lage des Mittelpunktes M auf o kann die dazugehörige Berührkugel gezeichnet werden. Alle diese Kugeln von gleichem Radius berühren die Fläche; die Hüllkurve ihrer Bilder ist also der Umriss des Torus. Mit dieser Methode wurden in Abb. 4.38 Tori gezeichnet um typische Formen des Torusumrisses zu zeigen. Der

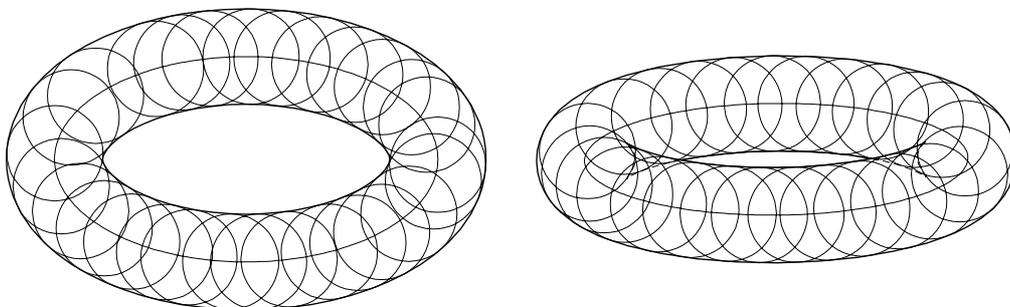


Abbildung 4.38: Formen des Torusumrisses bei Normalprojektion

Torusumriss ist aber eine Parallelkurve zum Normalriss des Mittlenkreises. Beim Zeichnen kann man daher die bereits bei den Rohrflächen besprochene Eigenschaft von Parallelkurven benutzen, nämlich dass sie eine gemeinsame Evolute besitzen. Im Fall des Torusumrisses bedeutet

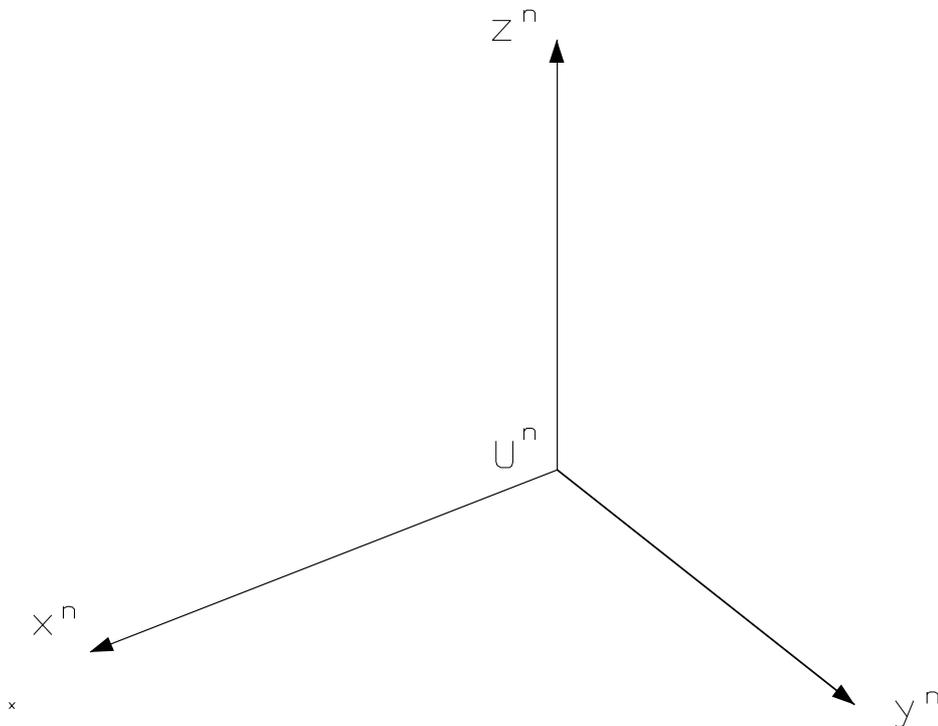


Abbildung 4.39: Torus in normaler Axonometrie

dies, dass die Mittenellipse o^n und der Torusumriss u^n gemeinsame Krümmungsmittelpunkte besitzen. Man bezeichnet den Torusumriss u^n als *Toroide*. Die Toroide kann bis zu vier reelle Spitzen haben (vgl. Abb.4.27). Bezeichnen a und b die Länge der halben Haupt- bzw. Nebenachse der Ellipse o^n , R den Meridiankreisradius des Torus, dann treten reelle Spitzen von u^n nur auf für

$$\frac{b^2}{a^2} < R < \frac{a^2}{b} \quad (4.7)$$

Bemerkung: Auch wenn der äußere Teil der Toroide oft *ellipsenähnlich* aussieht, handelt es sich nie um eine Ellipse sondern nur um die Parallelkurve einer Ellipse.

Beispiel 4.4 Der Mittenkreis o eines Torus liegt in der $[xy]$ -Ebene (Mittelpunkt U , Radius $b = 6\text{cm}$), der Radius des Meridiankreises beträgt $a = 3\text{cm}$. Der Torus ist in der angegebenen normalen Axonometrie abzubilden.

Konstruktion: Zuerst wird das axonometrische Bild o^n des Mittenkreises konstruiert. Punkte des Torusumrisses liegen nun auf den Normalen von o^n im Abstand a . Da die Ellipsennormalen in den Scheiteln A, B, C und D von o^n mit den Achsen von o^n übereinstimmen, können hier die Umrisspunkte leicht bestimmt werden. Investiert man noch, dass die Krümmungsmittelpunkte K_1, \dots, K_4 von o^n in A, B, C, D auch Krümmungsmittelpunkte für die entsprechenden Punkte der Toroide u^n sind, so hat man bereits acht Punkte von u^n samt Krümmungskreisen bestimmt. Um einen allgemeinen Punkt U^n von u^n zu konstruieren, braucht man in einem allgemeinen Punkt P^n von o^n die Ellipsennormale n . Sie wird über die Affinität zum Hauptscheitelkreis von o^n bestimmt. Die Tangente an u^n in U^n ist parallel zur Ellipsentangente in P^n (Parallelkurve!). Die Spitzen von u^n können nur näherungsweise angegeben werden; sie liegen auf der Evolute o^* der Ellipse o^n . Die Spitzentangenten sind normal zu o^* .

4.4.4 Kanalflächen (Pipesurfaces)

Eine Verallgemeinerung der Rohrflächen bekommt man wenn der Radius der erzeugenden Kugeln veränderlich sein darf. Das Hüllgebilde einer einparametrischen Schar von Kugeln mit veränderlichem Radius heißt *Kanalfläche*. In manchen CAD-Systemen (z.B. RHINO3D) sind derartige Flächen unter dem Namen pipe surfaces implementiert. Die Variationsmöglichkeiten für die Radiusfunktion sind allerdings beschränkt. Es ist meist nur möglich den Anfangsradius und den Endradius anzugeben. Dies ist z.B. in Abb. 4.40 geschehen, wo eine Spiralkurve als Mittenkurve angenommen wurde und der Anfangsradius und der Endradius der Kanalfläche angegeben wurde. Die Radien dazwischen werden interpoliert und mit der Bogenlänge der Mittenkurve verändert. Ein interessantes Beispiel von Kanalflächen sind die nach dem französischen Geo-

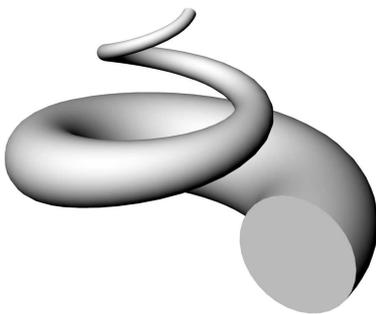


Abbildung 4.40: Kanalfläche

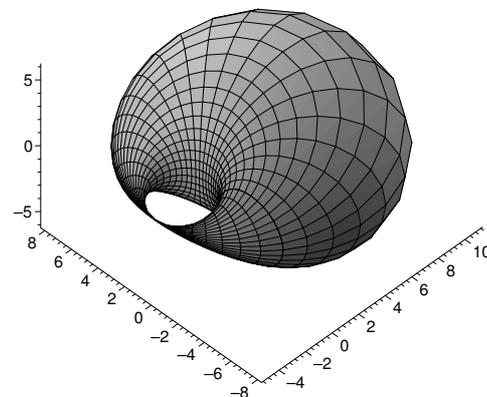


Abbildung 4.41: Einhorn

meter CH. DUPIN (1784-1873) benannten Dupinschen Zykliken. Sie können geissermaßen als Verallgemeinerungen des Torus angesehen werden und weisen verschiedene Typen auf: Einhorn, Zweihorn, Ringzyklide, Dornzyklide und Spindelzyklide. Zykliken treten bei der Lösung für die folgende geometrische Aufgabe auf: Man bestimme alle Kugeln, die drei vorgegebene Kugeln gleichzeitig berühren. Alle Kugeln, die diese Aufgabe lösen hüllen eine Zykliken ein. Abb.4.41 zeigt das Einhorn.

4.5 Kreisflächen

Eine Fläche Φ heißt eine *Kreisfläche*, wenn sie mindestens eine stetige Schar von Kreisen trägt.

Bemerkung 1 Mit dieser Definition gehören natürlich eine Reihe von bereits besprochenen Flächen, wie Kugel, Drehzylinder, Drehkegel, Drehflächen zu den Kreisflächen.

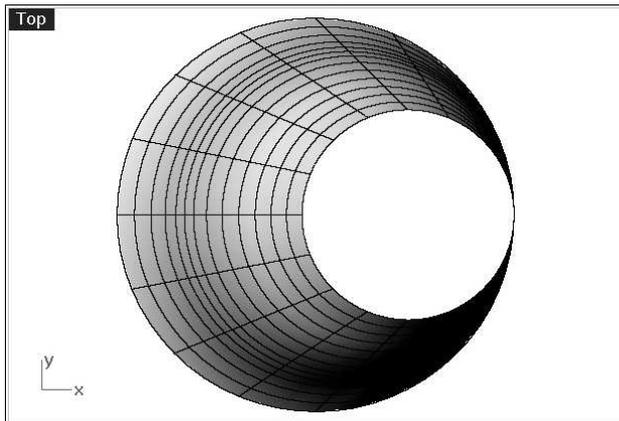


Abbildung 4.42: Reduktionsstück Grundriss

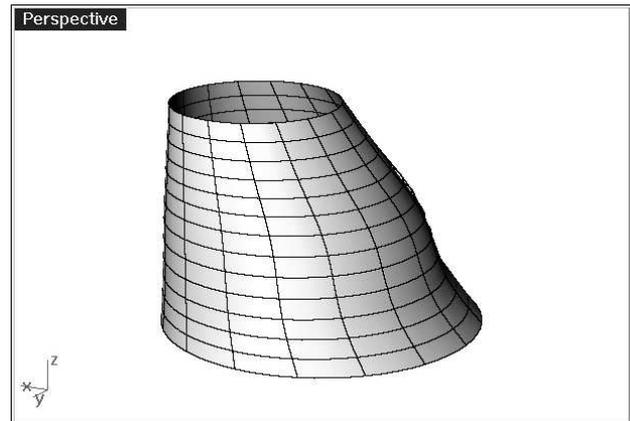


Abbildung 4.43: Reduktionsstück Axonometrie

Kreisflächen haben in der technischen Praxis vielfältige Anwendungen. Als Beispiel sei das exzentrische Reduktionsstück gezeigt, das vor allem bei Kanalisationsschächten verwendet wird und in der in Abb. 4.42 und 4.43 gezeigten Aufstellung aus Kreisen in waagrechten Ebenen aufgebaut ist. Von eher theoretischem Wert ist das Beispiel einer Kreisfläche in Abb. 4.44. Zu betonen ist, dass auch für die Herstellung der Bilder am Computer, das Wissen über die geometrische Erzeugungsweise für die Herleitung der Flächengleichung unbedingt notwendig ist. In Abb. 4.45 ist eine Kreisfläche zu sehen, die in RHINO3D mit dem Befehl `one rail surface` erzeugt wurde. Dabei wurde ein Kreis als "shape"-Kurve vorgegeben und eine Freiformkurve wurde als "rail" angegeben.

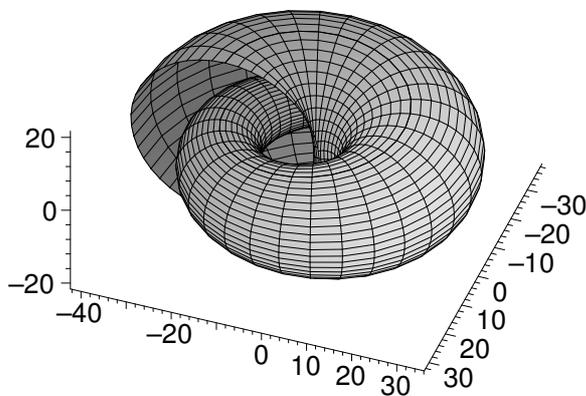


Abbildung 4.44: Kreisfläche

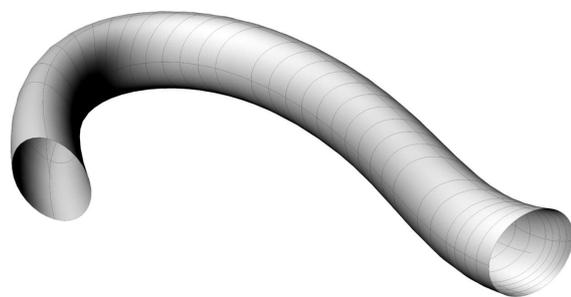


Abbildung 4.45: Kreisfläche als "one rail surface"

4.6 Parallelfächen (Offsetsurfaces)

Wir haben in unseren bisherigen Überlegungen Materialstärken außer Acht gelassen. Um Materialstärken zu modellieren brauchen wir den Begriff der Parallelfäche. Die *Parallelfäche* $\bar{\Phi}$ zu einer gegebenen Fläche Φ ist dabei so erklärt, dass in jedem Punkt von $P \in \Phi$ auf der Flächennormalen n eine konstante Strecke $\overline{PP^*} = a$ vom Punkt P aus abgetragen wird. Mathematisch ergibt sich die Gleichung der Parallelfäche aus der Parameterdarstellung der Fläche $\vec{X}(u, v)$

$$\bar{\Phi} : \vec{Y} = \vec{X}(u, v) \pm a\vec{n}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{X}_u \times \vec{X}_v}{|\vec{X}_u \times \vec{X}_v|} \quad (4.8)$$

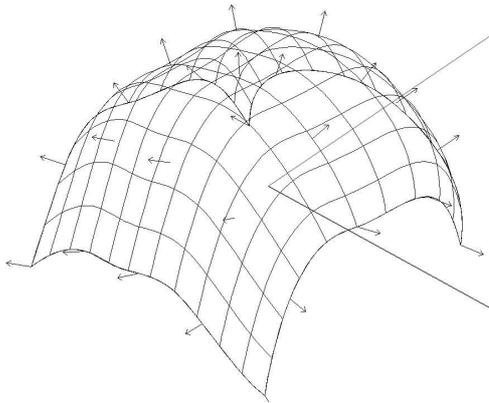


Abbildung 4.46: Flächennormalen

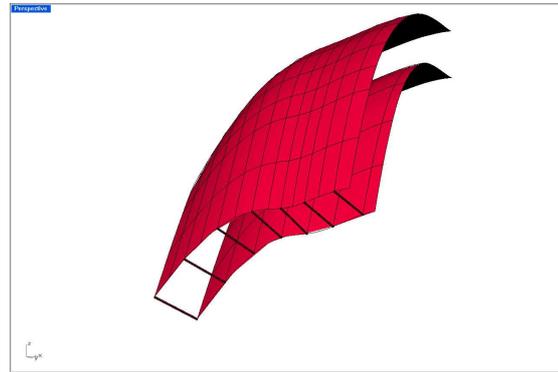


Abbildung 4.47: Parallelfäche

Durch die Konstruktion ergibt sich:

- In entsprechenden Punkten PP^* zweier Parallelfächen sind die Tangentialebenen parallel.
- Parallelfächen haben gemeinsame Flächennormalen.
- Zu jeder Fläche gibt es unendlich viele Parallelfächen.

Die Parallelfächen zu einer Ebene sind wieder Ebenen; die Parallelfächen zu einer Kugel sind zu ihr konzentrische Kugeln (alle Flächennormalen einer Kugel gehen durch ihren Mittelpunkt). Wir halten fest, dass Parallelfächen von Torsen (siehe Kapitel ??), Rohrflächen und Kanalflächen wieder Flächen des gleichen Typs sind.

4.7 Ausrundungsflächen (Filletts)

Bei technischen Objekten sind scharfe Kanten unerwünscht. In der Praxis kennt man zwei Verfahren um scharfe Kanten zu "brechen". Das ist einmal das *Fasen*, bei dem scharfe Kanten z.B. mit Hilfe einer Feile gebrochen werden. Fasen sind in jedem CAD Programm implementiert um diesen Prozess modellieren zu können ("Chamfer"). Handelt es sich bei der Kante um eine

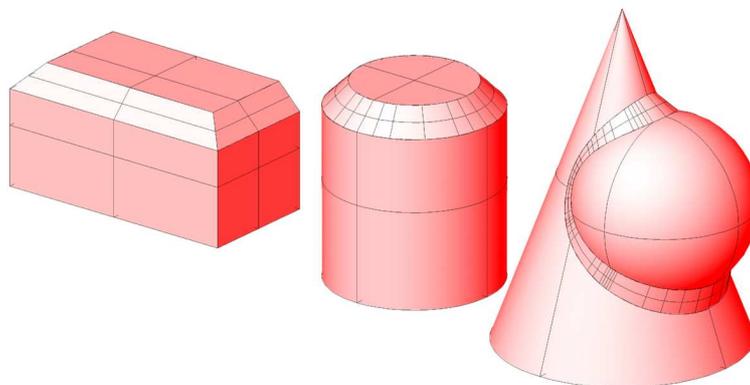


Abbildung 4.48: Verschiedene Flächen mit Fasen

Gerade, so ist die Fase eine Ebene; ist die Kante ein Kreis, so ist die Fase ein Kegel. Ist die

Kante jedoch eine allgemeine Raumkurve, so ist die Fase eine Regelfläche, deren Erzeugung wesentlich auf der noch zu besprechenden Ausrundungsfläche beruht.

Das zweite Verfahren zum Brechen von scharfen Kanten ist die Konstruktion von Abrundungen oder Ausrundungen. Ob eine Abrundung oder eine Ausrundung vorliegt hängt davon ab, ob eine ausspringende oder eine einspringende Kante vorliegt. Durch die Ab- oder Ausrundung entsteht eine Ausrundungsfläche. Die *Ausrundungsfläche (Fillet)* ist die Hüllfläche

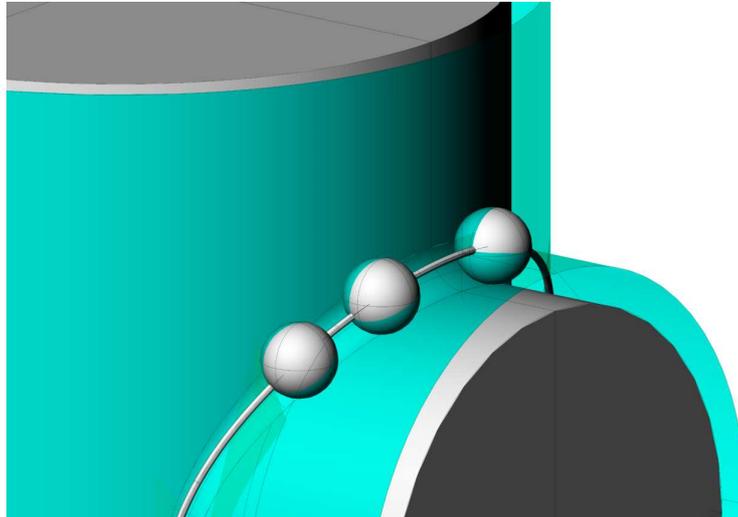


Abbildung 4.49: Mittelpunktskurve der Ausrundungsfläche als Schnitt der Parallelflächen

einer einparametrischen Schar von Kugeln deren Mittelpunkte auf der Durchdringungskurve k von zwei Parallelflächen im Abstand a zu den beteiligten Grundflächen liegen (Abb.4.49, die Parallelflächen sind durchschimmernd eingezeichnet). a bezeichnet den Ausrundungsradius. Die Ausrundungsfläche berührt alle Grundflächen (Abb.4.51, man beachte, dass die in dieser Abbildung eingezeichneten Berührkurven keine Kanten am Objekt darstellen). Die Berührkurve

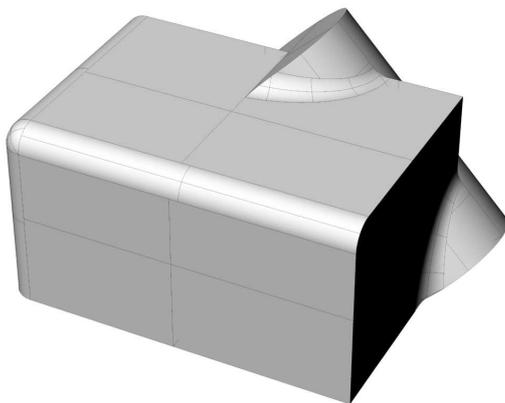


Abbildung 4.50: Objekt mit Ausrundungen

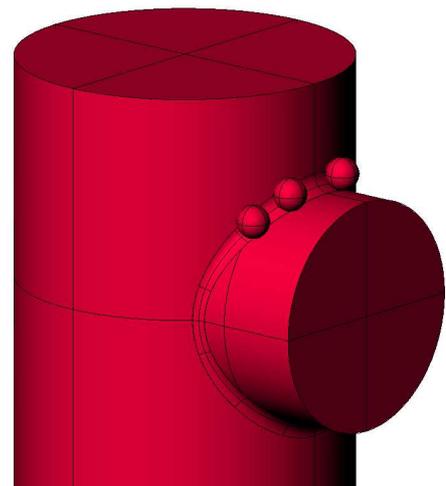


Abbildung 4.51: Erzeugung der Ausrundungsfläche mittels Berührkugeln

wird von den von k auf die Grundfläche gefällten Loten aus der Grundfläche ausgeschnitten. Die Abbildung 4.50 zeigt ein einfaches Objekt bestehend aus einem Quader und einem schräg liegenden Zylinder. Die bei den Quaderkanten auftretenden konkaven Ausrundungsflächen sind

Viertelzylinder und Kugelschalen (in den Eckpunkten), während die bei den Durchdringungskurven Zylinder-Quader (Ellipsen!) auftretenden Ausrundungsflächen Rohrflächen mit einer elliptischen Mittenkurve sind.

4.8 Schiebflächen

Nimmt man bei einer Schiebung im 3-dim Raum eine Kurve mit, so entsteht eine *Schiebfläche*. Prinzipiell kann eine Schiebung entweder geradlinig oder krummlinig sein. Bei der geradlinigen Schiebung einer beliebigen Kurve entsteht eine allgemeine Zylinderfläche. Die Schiebung einer Kurve k längs einer krummen Kurve l erzeugt eine allgemeine Schiebfläche. Wir bezeichnen die Kurve l als Leit- oder auch Profilkurve. Die einzelnen Lagen der Kurve k sind untereinander kongruent. Es gilt der wichtige

Satz 4.4 *Entsteht eine Schiebfläche durch eine stetige Schiebung der Kurve k längs l , so entsteht dieselbe Schiebfläche durch stetige Schiebung der Kurve l längs k .*

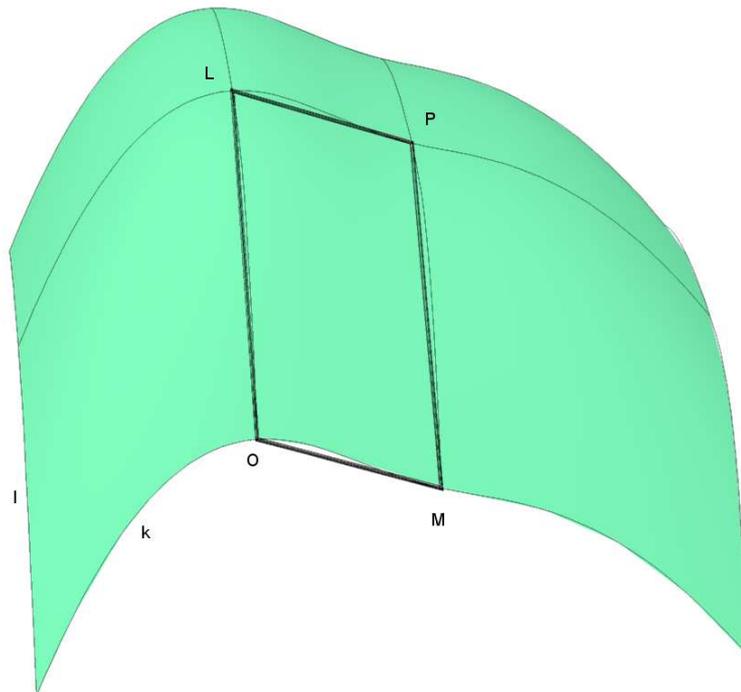


Abbildung 4.52: Schiebfläche

Man sieht diesen Satz folgendermaßen ein: Bei der Schiebung $O \mapsto L$ mit $L \in l$ gelangt der Punkt $M \in k$ in den Punkt P , der auf der zu k schiebungsgleichen Kurve durch L liegt. Die vier Punkte $\{O, L, P, M\}$ bilden ein Parallelogramm. Daher gelangt L bei der Schiebung $O \mapsto M$ ebenfalls in den Punkt P . \diamond

In einer Schiebfläche liegen daher zwei Scharen von untereinander jeweils schiebungsgleichen Kurven, welche *Schiebkurven* genannt werden.

Wir behandeln nun jene Schiebflächen, die als Schalen in der modernen Architektur auftreten: eine Schiebfläche, die durch Schiebung einer Parabel k längs einer Parabel l heißt *Paraboloid*, falls l und m parallele Durchmessergeraden besitzen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit

dürfen wir nach Satz 4.4 annehmen, dass der gemeinsame Punkt S von k und l sowohl Scheitel der Parabel k als auch von l ist. S heißt *Scheitel* des Paraboloids, die Tangentialebene in S heißt *Scheiteltangentialebene* τ_S und die zu τ_S normale, beiden Parabeln gemeinsame Achse ist die *Achse* des Paraboloids. Jede zur Achse parallel Gerades bzw. Ebene heißt *Durchmessergerade* bzw. *Durchmesserebene*.

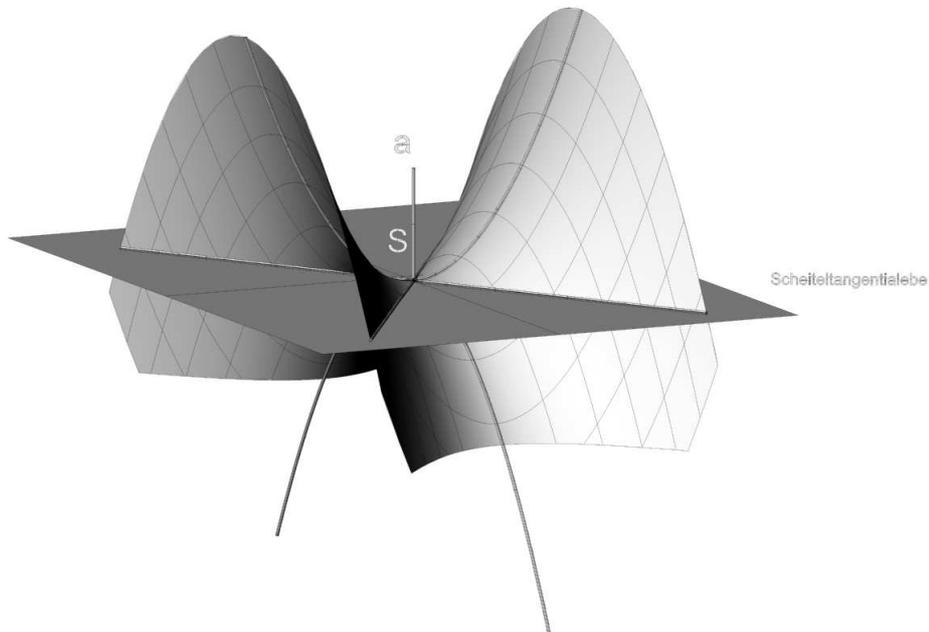


Abbildung 4.53: Scheitel und Achse eines Paraboloids

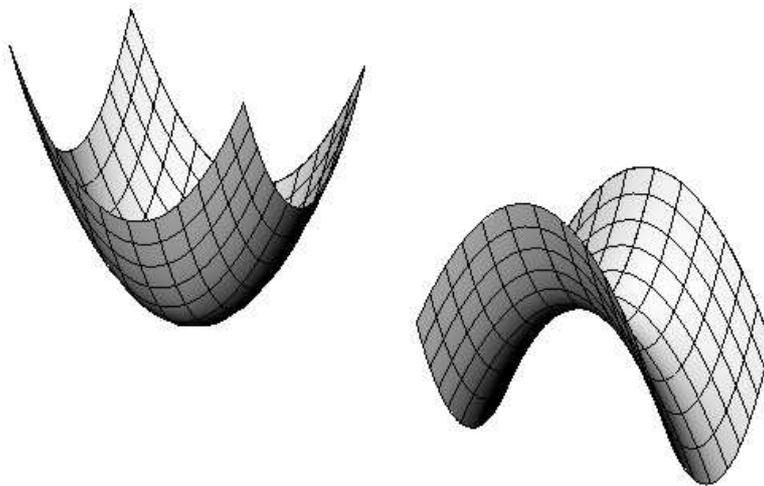


Abbildung 4.54: Elliptisches und hyperbolisches Paraboloid

Liegen beide erzeugenden Parabeln k, l auf derselben Seite der Scheiteltangentialebene τ_S , so erzeugen sie ein *elliptisches Paraboloid*, liegen sie auf verschiedenen Seiten, dann wird ein *hyperbolisches Paraboloid* erzeugt. Das hyperbolische Paraboloid gestattet noch eine weitere Erzeugung, nämlich die als Regelfläche. Es ist außerdem in der Vorlesung Mathematisches Denken als lineare Interpolationsfläche zwischen zwei windschiefen Geraden besprochen worden. Ein Drehparaboloid ist ein spezielles elliptisches Paraboloid, das dadurch gekennzeichnet ist, dass k und l kongruent sind und in orthogonalen Ebenen liegen.

4.9 Regelflächen



Abbildung 4.55: Staatsgalerie Stuttgart (J. Stirling, 1984)

4.9.1 Regelflächen als Bahnflächen bei allgemeinen Bewegungen

Nimmt man bei einem allgemeinen Bewegungsvorgang eine Gerade mit, dann ist die Bahnfläche eine Regelfläche. Kegel und Zylinder sind spezielle Regelflächen, sie entstehen wenn eine Gerade, die entweder parallel zu einer Achse ist oder die Achse schneidet, um diese Achse verdreht wird (Bewegungsvorgang ist eine Drehung). Wir betrachten nun in einem Beispiel einen allgemeinen Bewegungsvorgang, der durch die 4×4 -Matrix \mathbf{B} gegeben sei. In dieser Schreibweise ist ein Punkt gegeben durch seine vier homogenen Koordinaten $P(1 : x : y : z)$, die als Vektor geschrieben werden. In der Matrix \mathbf{B} steht in der ersten Spalte der Schiebvektor der Bewegung und die rechte untere 3×3 Untermatrix ist eigentlich orthogonal:

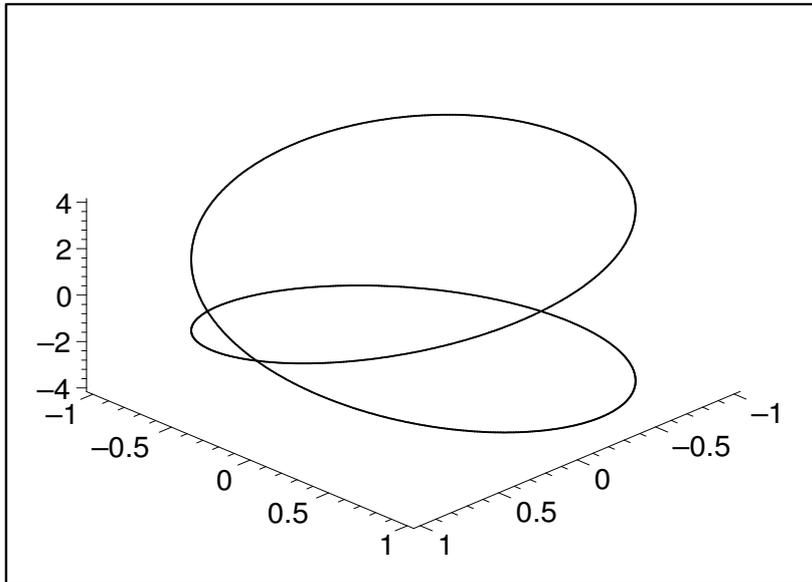
```
> restart;
> B:=matrix(4,4,[1,0,0,0,0,
> cos(t),-sin(t),0,0,sin(t),cos(t),0,4*sin(t/2),0,0,1]);
```

$$B := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 4 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Bahnkurve eines Punktes (z. B.: $P(1,0,0)$) ist gegeben durch

```
> bahn:=evalm(B&*vector([1,1,0,0]));
> with(plots):
> spacecurve([bahn[2],bahn[3],bahn[4]],
> t=0..4*Pi,thickness=3,color=black,numpoints=1000,axes=FRAME);
```

$$\text{bahn} := \left[1, \cos(t), \sin(t), 4 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right]$$

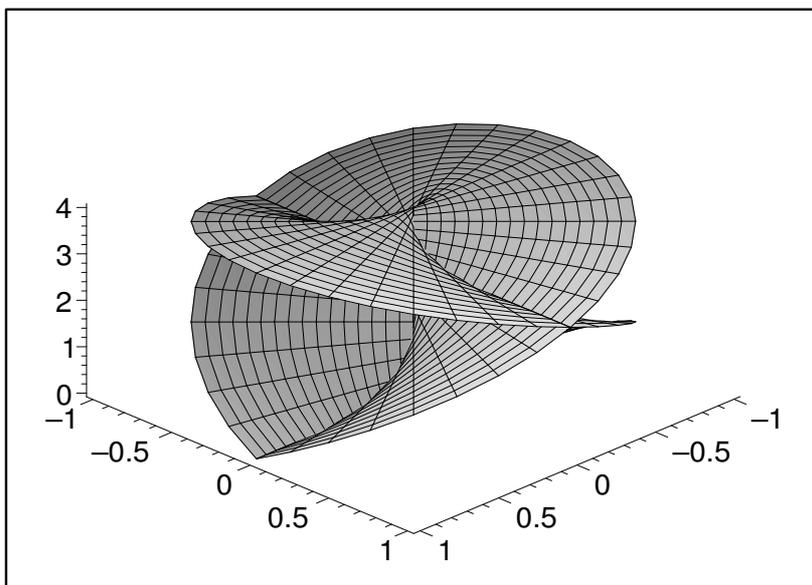


Die Bahnfläche einer Geraden (z. B. der x-Achse) ist gegeben durch

```
> Bahnfl:=evalm(B&*vector([1,u,0,0]));
```

$$\text{Bahnfl} := \left[1, \cos(t) u, \sin(t) u, 4 \sin\left(\frac{1}{2}t\right) \right]$$

```
> plot3d([Bahnfl[2],Bahnfl[3],Bahnfl[4]],
t=0..2*Pi,u=-1..1,numpoints=1000,axes=framed);
```



Regelflächen durch drei Leitgeraden

Regelflächen sind durch die Angabe von drei Leitkurven eindeutig bestimmt (Abb:4.56). Ist eine der drei Leitkurven eine Gerade, dann ist die Regelfläche ein *Konoid*, ist die gerade Leitkurve eine uneigentliche Gerade (eine Ferngerade), dann heißt die Regelfläche *konoidal*.

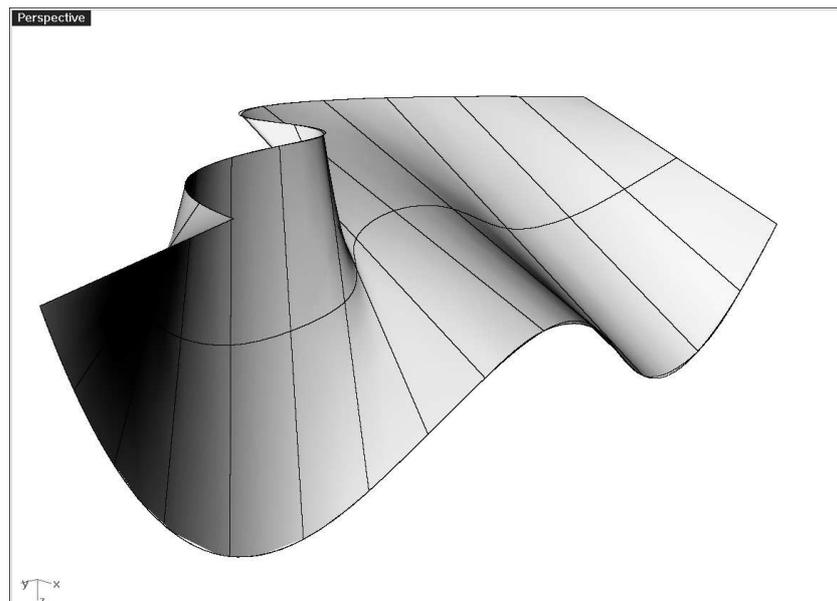


Abbildung 4.56: Regelfläche durch drei Kurven

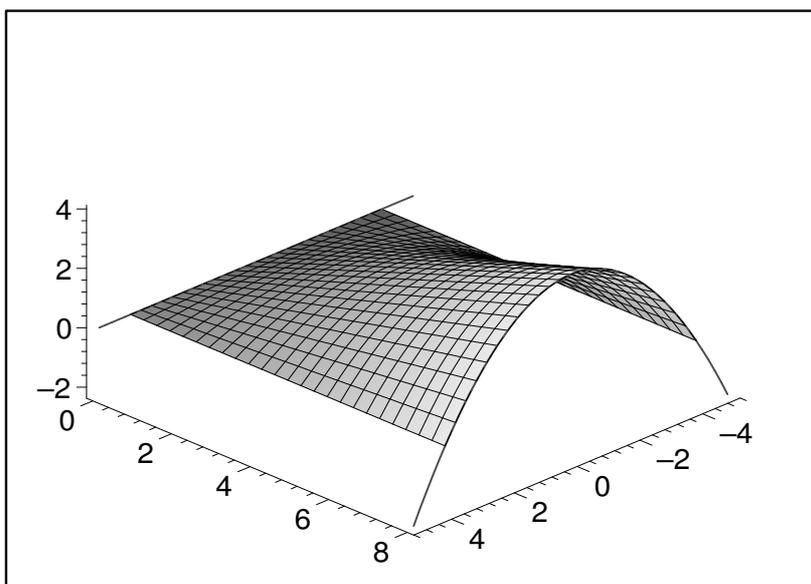
Wir zeigen dazu ein Beispiel: gegeben sei eine Parabel als Leitkurve l_1 , und die x -Achse als Leitkurve l_2 . Weiters sei die Ferngerade der yz -Ebene die dritte Leitkurve (d. h. alle Erzeugenden der Regelfläche müssen zur yz -Ebene parallel sein).

```
> l1:=[2*u,8,4-u^2];
> L1:=spacecurve(l1,u=-2.5..2.5,color=red,thickness=3);
> L2:=spacecurve([2*u,0,0],u=-2.5..2.5,color=red,thickness=3);
> f1:=plot3d([2*u,lambda*8,lambda*(4-u^2)],u=-2..2,lambda=-0..1,axes=frame);
> ame):
```

Im Plot werden die zwei eigentlichen Leitkurven und die erzeugte Regelfläche gezeigt:

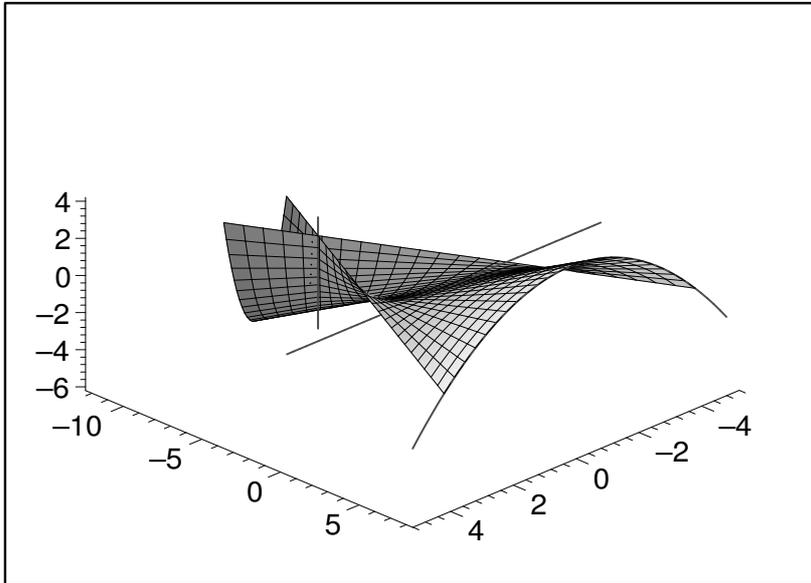
```
> display3d({f1,L1,L2});
```

$$l1 := [2u, 8, 4 - u^2]$$



Durch eine kleine Veränderung der Flächengleichung kann man die uneigentliche Leitgerade "ins Endliche hereinholen" und zu einer (zweiten) eigentlichen Leitgeraden machen.

- ```
> f11:=plot3d([u+lambda*u,lambda*(8),lambda*(4-u^2)],u=-2..2,lambda=-1.
> 5..1):
> L3:=spacecurve([0,-8,2*u],u=-2.5..0.5,color=red,thickness=3,axes=framed):
> display3d({f11,L2,L1,L3});
```



#### 4.9.2 Hyperbolisches Paraboloid

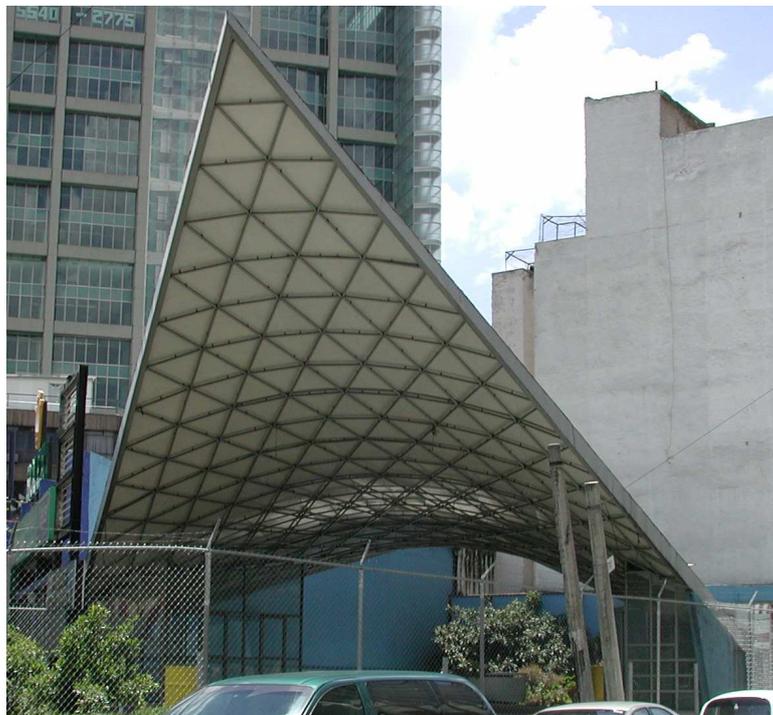


Abbildung 4.57: Hyperbolisches Paraboloid

Das *Hyperbolische Paraboloid (HP)* ist eine spezielle Regelfläche. Das HP wurde bereits im Kapitel über Schiebflächen behandelt und hat sich vor allem im Schalenbau bewährt. Die Normalform der Flächengleichung ist  $z = xy$ , Durch Schnitte mit den Ebenen  $x = \text{const.}$  und  $y = \text{const.}$  erhält man die zwei Scharen von Geraden (*Erzeugende*). Diese Erzeugenden sind zu den beiden Ebenen  $(xz)$  und  $(yz)$  (Richtebenen) parallel. Das HP ist in diesem Sinne eine *doppelte Regelfläche*. Je zwei Erzeugende einer Schar sind zueinander windschief. Je zwei Erzeugende verschiedener Scharen schneiden sich in einem Flächenpunkt und spannen die Tangentialebene in diesem Punkt auf. Die Schnittgerade der Richtebenen gibt die Achsenrichtung des HP an. Normal zur Achsenrichtung gibt es eine Tangentialebene, deren Berührungspunkt Scheitel des HP heißt. Weiters ist das HP eine Fläche 2.Ordnung (eine Quadrik).

Ebene Schnitte eines HP sind Hyperbeln mit der Ausnahme von Schnitten parallel zur Achse des HP. Diese sind Parabeln. Zum Abschluss dieser kurzen Ausführungen über das HP wird die konstruktive Anwendung der oben hergeleiteten Eigenschaften gezeigt.

**Beispiel 4.5** *Ein hyperbolisches Paraboloid ist durch vier windschiefe Erzeugende gegeben. Man konstruiere den Aufriss und den durch  $\pi'_3$  gegebenen Seitenriss der Fläche und schneide sie mit einer Parallelebene zur Grundrissebene ab.*

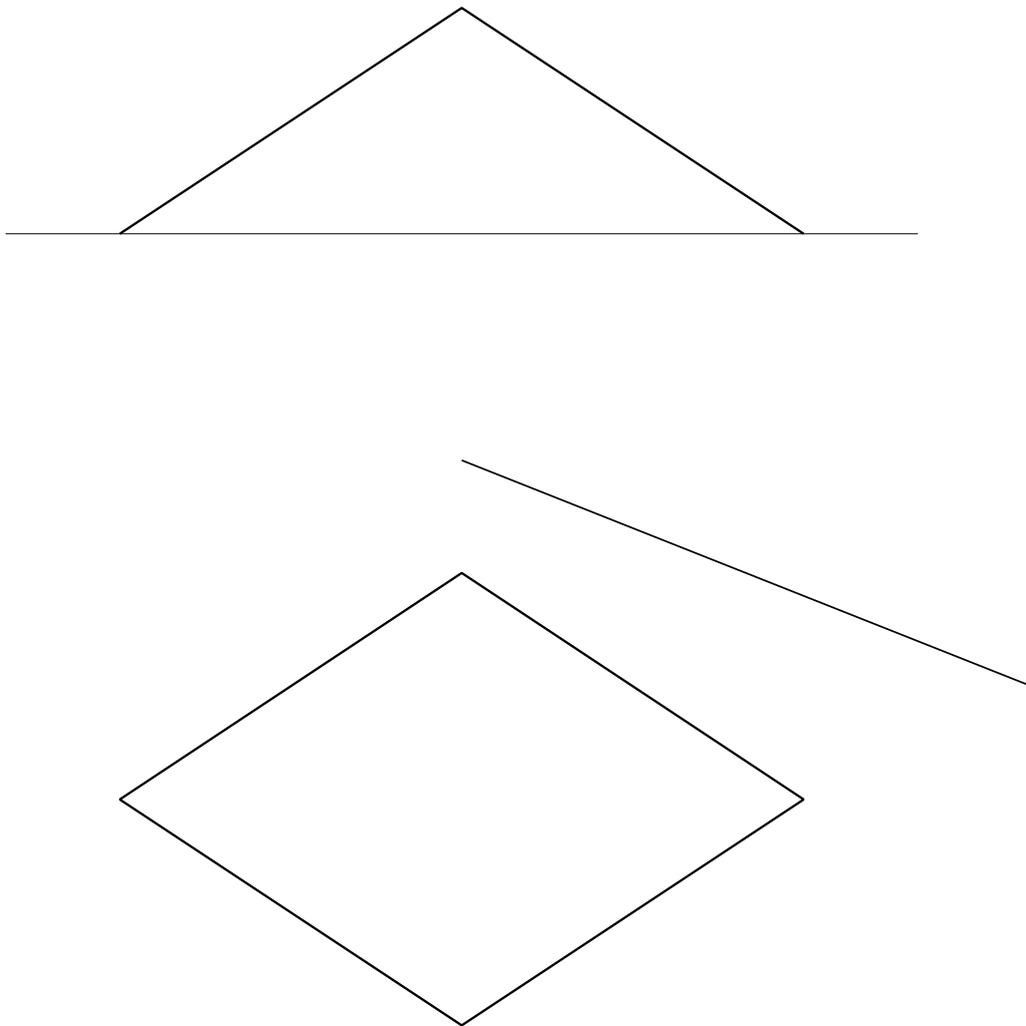


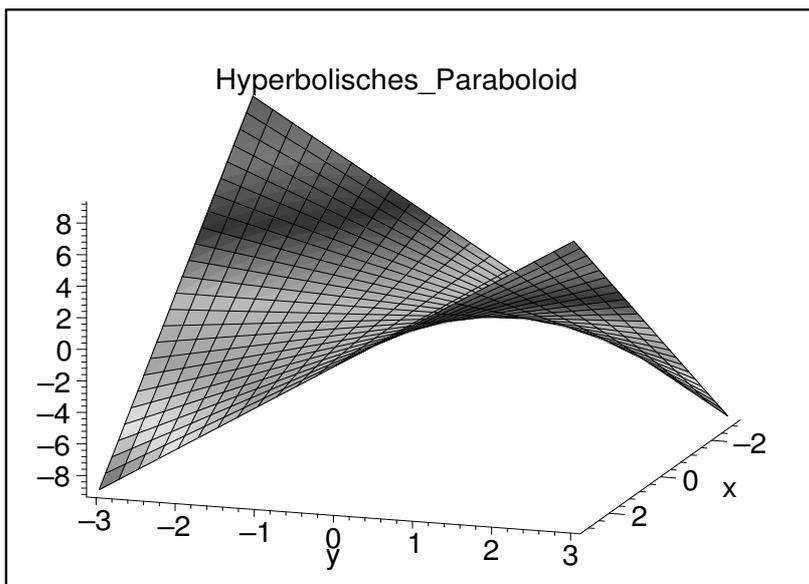
Abbildung 4.58: Hyperbolisches Paraboloid

Konstruktionsbeschreibung: *Durch das windschiefe Erzeugendenvierseit sind je zwei Erzeugende  $(e_1, e_2, f_1, f_2)$  der beiden Erzeugendenscharen gegeben. Wie oben hergeleitet sind die beiden*

Erzeugenden der gleichen Schar  $e_1, e_2$  bzw.  $f_1, f_2$  zueinander windschief, während Erzeugenden verschiedener Scharen (z. B.  $e_1, f_1$ ) einen Schnittpunkt haben. Um den Umriss für den Aufriss zu konstruieren sind jene Flächenpunkte des HP zu bestimmen, die im Aufriss projizierende Tangentialebenen aufweisen. Da die Tangentialebenen des HP von jeweils einer  $e$ -Erzeugenden und einer  $f$ -Erzeugenden aufgespannt werden, müssen die  $e$ -Erzeugende und die  $f$ -Erzeugende im Aufriss zusammenfallen um eine projizierende Tangentialebene zu erzeugen. Dies ist im Beispiel ganz offensichtlich für  $e_1'' = f_1''$  bzw.  $e_2'' = f_2''$  der Fall womit die Endpunkte  $1''$  und  $2''$  des Erzeugendenvierseits als Umrisspunkte nachgewiesen sind. Weitere Tangenten der Umrisskurve  $u_2''$  bekommt man durch Übertragen weiterer Erzeugenden in den Aufriss. Man beachte, dass die dafür notwendige Konstruktion mit der Casteljeau-Konstruktion für eine Parabel übereinstimmt. Die Umrisskurve für den Aufriss ist daher eine Parabel. Der Grundriss für die zugehörige Kontur ist eine Gerade. Durch analoge Überlegungen erhält man auch die Umrisskurve für den Grundriss. Die Schnittkurve mit der zur Grundrissebene parallelen Ebene wird punktweise ermittelt. Sie ist eine Hyperbel.

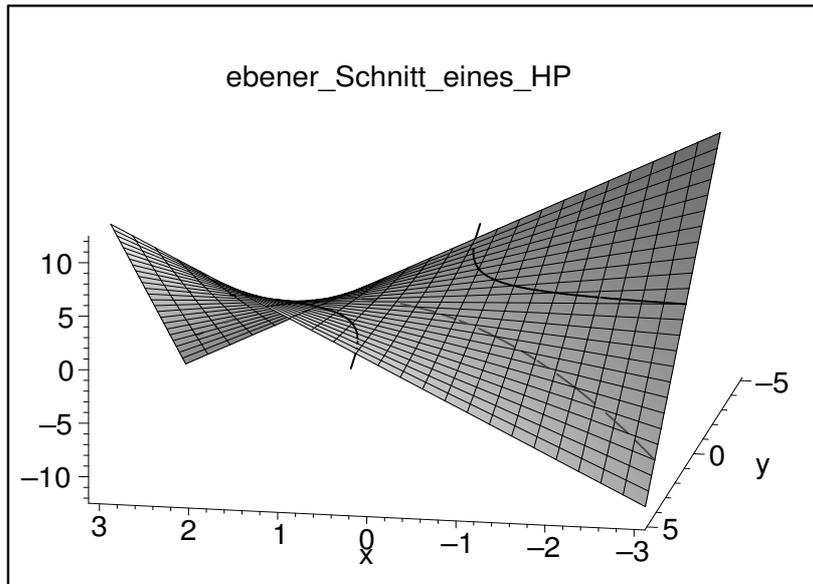
### Darstellung des HP mit Maple

```
> plot3d({x*y },x=-3..3,y=-3..3,axes=framed,orientation=[18,68],
> title=Hyperbolisches_Paraboloid,color=x*y);
```



Ebene Schnitte des HP:

```
> k1:=spacecurve([t,1/t,1],t=-3..-0.2,color=black,thickness=3):
> k2:=spacecurve([t,1/t,1],t=0.2..3,color=black,thickness=3):
> k3:=spacecurve([t,-t,-t^2],t=-3..3,color=red,thickness=3):
> hp:=plot3d({x*y },x=-3..3,y=-4..4,axes=framed,orientation=[100,60],
> title=Hyperbolisches_Paraboloid,title=ebener_Schnitt_eines_HP):
> display3d({hp,k1,k2,k3});
```



### 4.9.3 Drehhyperboloid

Das einschalige Drehhyperboloid (DH1) ist eine Drehfläche, die durch Verdrehung einer Geraden  $e$  um eine windschiefe Achse  $a$  entsteht. Es trägt zwei Scharen von Erzeugenden. Es kann durch die implizite Drehflächengleichung

$$> \text{hy} := (x^2 + y^2) / a^2 - z^2 / b^2 - 1;$$

$$\text{hy} := \frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1$$

dargestellt werden. Für die Computergraphik ist die dazu äquivalente Parameterdarstellung  $x = a * \cos(t) * \cosh(u)$ ,  $y = a * \sin(t) * \cosh(u)$ ,  $z = b * \sinh(u)$  wesentlich günstiger. Um die Richtigkeit dieser Parameterdarstellung einzusehen kann man die Parameterdarstellung in die implizite Flächengleichung einsetzen. Die Parameterdarstellung muss die implizite Flächengleichung erfüllen.

$$> \text{subs}(x=a*\cos(t)*\cosh(u), y=a*\sin(t)*\cosh(u), z=b*\sinh(u), \text{hy});$$

$$\frac{a^2 \cos(t)^2 \cosh(u)^2 + a^2 \sin(t)^2 \cosh(u)^2}{a^2} - \sinh(u)^2 - 1$$

$$> \text{simplify}(\%);$$

0

Um zur zweiten Schar von Geraden auf dem DH1 zu kommen schneiden wir die Fläche mit einer achsenparallelen Ebene ( $x = a$ ) ab.

$$> \text{subs}(x=a, \text{hy});$$

$$\frac{a^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - 1$$

$$> \text{factor}(\%);$$

$$\frac{(b y - z a) (b y + z a)}{a^2 b^2}$$

Wir erhalten zwei Geraden in der Ebene  $x=a$ ! Um die Fläche mit ihren zwei Scharen von Geraden zu plotten drehen wir die beiden Geraden um die Achse:

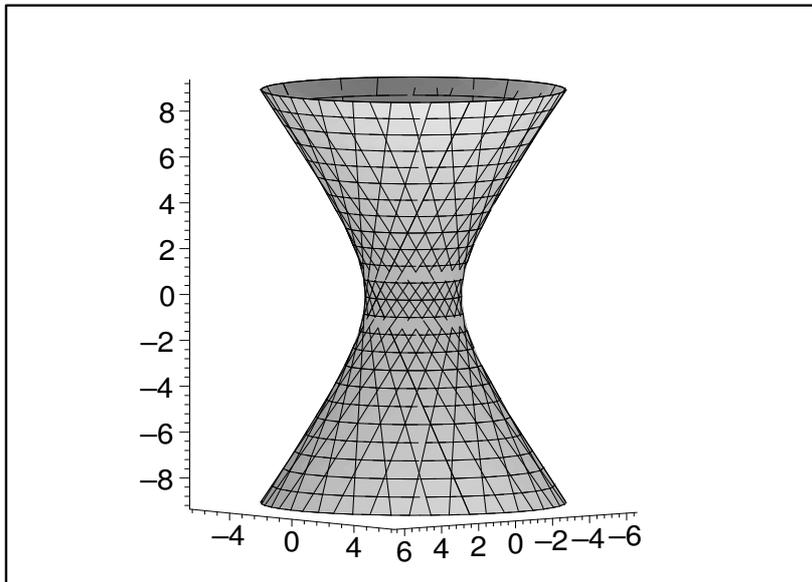
$$> \text{hyp1} := \text{evalm}(\text{Drehmatrix} * \text{vector}([1, 2, u^2, u*3]));$$

$$\text{hyp1} := [1, 2 \cos(t) - 2 \sin(t) u, 2 \sin(t) + 2 \cos(t) u, 3 u]$$

```

> ph1:=plot3d([hyp1[2],hyp1[3],hyp1[4]],t=0..2*Pi,u=-3..3,axes=frame,sc
> aling=constrained):
> hyp2:=evalm(Drehmatrix*vector([1,2,u*2,-u*3]));
 hyp2 := [1, 2 cos(t) - 2 sin(t) u, 2 sin(t) + 2 cos(t) u, -3 u]
> ph2:=plot3d([hyp2[2],hyp2[3],hyp2[4]],t=0..2*Pi,u=-3..3,axes=frame,sc
> aling=constrained,orientation=[50,85]):
> display3d({ph1,ph2});

```



## 4.10 Übersichtsfragen

1. Was ist ein Polyeder?
2. Wann ist ein Polyeder konvex? Beispiel eines konkaven Polyeders.
3. Was versteht man unter einem regulären Polyeder? Was unterscheidet die Platonischen Polyeder von den Sternpolyedern?
4. Welche Eigenschaften haben reguläre Polyeder?
5. Was sagt der Eulersche Polyedersatz aus? Wie hängt die Aussage dieses Satzes mit den topologischen Eigenschaften des Polyeders zusammen?
6. Was versteht man unter einem halbregulären Polyeder? Was sind die Eigenschaften der Archimedischen Polyeder, der Catalanschen Polyeder?
7. Was sind empirische Flächen? Gesetzmäßige Flächen? Was sind algebraische Flächen?
8. Wie ist eine Tangentialebene, eine Flächennormale einer Fläche definiert?
9. Was versteht man unter der Kontur bzw dem Umriss einer Fläche?
10. Unter welcher Bedingung treten Spitzen beim Umriss einer Fläche auf?

11. Wie wird eine Drehfläche angegeben? Was ist ein Breitenkreis, ein Plattkreis, ein Meridian? Was ist ein Hauptmeridian?
12. Wie konstruiert man die Flächennormale einer Drehfläche?
13. Wie ist eine Rohrfläche gegeben? Was ist die Charakteristik einer Drehfläche? Wie kann man einfach einen Normalumriss einer Rohrfläche konstruieren?
14. Was versteht man unter Parallelkurven (Offsetkurven)? Welche geometrischen Eigenschaften haben Offsetkurven?
15. Wie wird ein Torus erzeugt? Welche Typen von Tori gibt es?
16. Was ist eine Kanalfläche?
17. Was ist eine Kreisfläche?
18. Was ist eine Parallelfäche (Offsetfläche)? Welche Eigenschaften haben Parallelfächen?
19. Wie wird eine Ausrundungsfläche geometrisch erzeugt? Was versteht man unter einer Fase?
20. Wie wird eine Schiebfläche erzeugt? Welche geometrischen Eigenschaften haben Schiebflächen?
21. Welche Schiebflächen werden als Schalen im Bauwesen verwendet?
22. Erzeugung von Regelflächen? Was ist ein Konoid?
23. Welche Eigenschaften hat ein hyperbolisches Paraboloid? Was sind die ebenen Schnitte eines HP?
24. Was entsteht bei der Verdrehung einer Geraden um eine windschiefe Achse?
25. Wie ist die Tangentialebene eines HP bzw. eines Drehhyperboloid definiert?