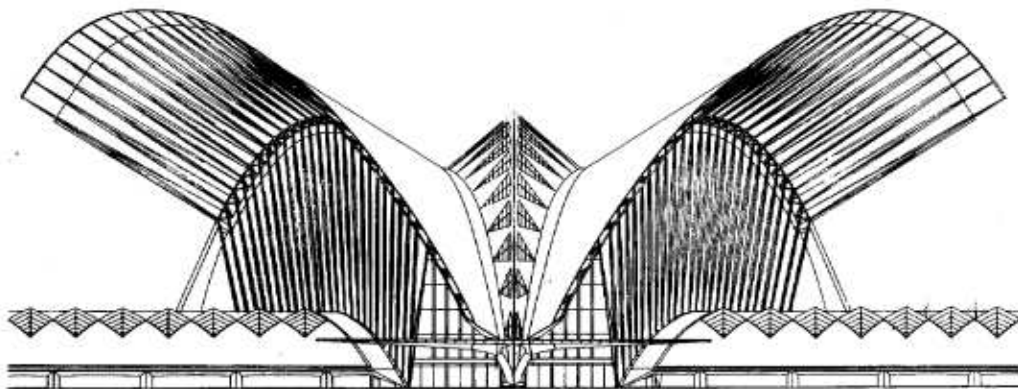


Darstellende Geometrie für Technische Mathematik



Manfred Husty

Institut für Technische Mathematik, Geometrie und Bauinformatik

`manfred.husty@uibk.ac.at`

SS 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Axonometrie	5
2.1	Projektion	5
2.2	Der Hauptsatz der Axonometrie, Aufbauverfahren	6
2.2.1	Spezielle Angaben für die schiefe Axonometrie	9
2.2.2	Das Einschneideverfahren von L. ECKHART	10
2.3	Normale Axonometrie	13
2.3.1	Kreise und Kugeln in normaler Axonometrie	16
2.3.2	Axonometrie in Computergraphik und CAD	17
2.3.3	Schiefe Axonometrie - Normale Axonometrie	21

1

Einleitung

Abkürzungen und verwendete Symbole:

- Punkte werden mit Großbuchstaben bezeichnet (P, Q, X, \dots)
- Geraden, Kurven werden mit Kleinbuchstaben bezeichnet (g, h, k, \dots)
- Ebenen werden mit griechischen Kleinbuchstaben bezeichnet ($\alpha, \beta, \varepsilon, \pi, \dots$)
- Krumme Flächen werden mit griechischen Großbuchstaben bezeichnet ($\Gamma, \Phi, \Psi, \dots$)
- *Verbinden* von zwei geometrischen Objekten wird durch Einklammern der entsprechenden Bezeichnungen mit runden Klammern angegeben (z.B.: $g = (AB)$... g ist die Verbindungsgerade von A und B ; $\varepsilon = (QRS)$... ε ist die Verbindungsebene der drei Punkte Q, R, S).
- *Schneiden* von zwei geometrischen Objekten wird durch das mengentheoretische Schnittsymbol \cap angegeben (z.B.: $\alpha \cap \beta = g$... g ist die Schnittgerade der Ebenen α und β ; oder $\varepsilon \cap g = \{P\}$... P ist der Durchstoßpunkt der Geraden g durch die Ebene ε).
- \perp zwei Elemente stehen normal aufeinander
- *Parallelität* oder *nicht Parallelität* von zwei Objekten wird durch \parallel bzw. \nparallel angegeben (z.B.: $\alpha \parallel \beta$... α ist parallel zu β).
- *Abstände* zwischen zwei Objekten werden durch Querstriche über den Objektbezeichnungen angegeben (z.B.: $d = \overline{P\varepsilon}$... Abstand zwischen Punkt P und Ebene ε).
- \Rightarrow ... daraus folgt
- \in ... mengentheoretisches Enthaltensein, \subset ... Teilmenge einer Menge, $\{\}$... leere Menge
- Alle Begriffe sind dort wo sie definiert werden *kursiv* gesetzt.

Literatur:

Dies ist eine kleine Auswahl von relevanter Literatur. Weitere Fachbücher können im Institut eingesehen werden. Für Auskünfte steht der Lehrveranstaltungsleiter in den Sprechstunden gerne zur Verfügung.

- Bohne, E., Klix, W., Geometrie. Grundlagen für Anwendungen, Fachbuchverlag Leipzig, 1995.
- Brauner, H., Lehrbuch der konstruktiven Geometrie, Springer Verlag, Wien - New York, 1986.
- Brauner, H., Kicking, W., Baugeometrie I +II, Bauverlag, Wiesbaden und Berlin, 1977.
- Leopold, C., Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung, Kohlhammer Verlag, 1999.
- Wunderlich, W., Darstellende Geometrie I+ II, BI Hochschultaschenbücher, Mannheim 1987.

Weiters sind Vorlesungsmaterialien auf der homepage des Instituts zu finden.

<http://techmath.uibk.ac.at/geometry/>

Interessante links und Unterlagen sind auf der österreichischen Geometrieseite:

http://www.geometry.at/fr_materialien/index.html

2

Axonometrie

In diesem Abschnitt wird ein Abbildungsverfahren näher durchleuchtet, das zur Herstellung anschaulicher Bilder verwendet wird. Hierbei wird es unwesentlich sein ob diese Bilder in traditioneller Weise mit der Hand oder unter Zuhilfenahme von Computergraphik erzeugt werden. Wesentlich ist das Verständnis für das Abbildungsverfahren und die daraus resultierenden geometrischen Eigenschaften der abgebildeten Objekte. Insbesondere ist dieses Verständnis auch die Voraussetzung für das Anfertigen von geometrisch richtigen Handskizzen.

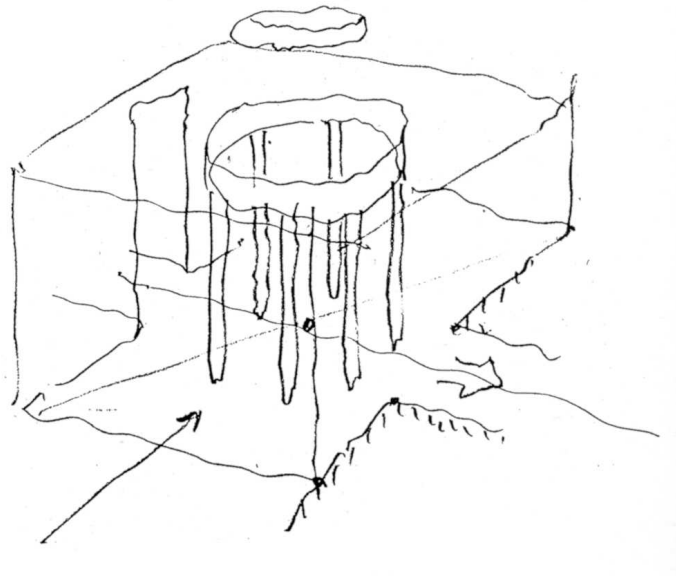


Abbildung 2.1: Axonometrische Handskizze von G. Peichl

2.1 Projektion

Punkte, Geraden, Kurven und Flächen und Körper werden im Folgenden immer als Punkt-mengen aufgefasst. Als geometrische Objekte sind sie dabei Idealisierungen von Objekten der Ingenieurswelt. Diese Idealisierung dient dazu Eigenschaften der Objekte gesetzmäßig beschreiben zu können und damit auch der Behandlung durch den Computer zugänglich zu machen.

Ein Beispiel dieser Idealisierung ist die für das Folgende vereinbarte Sprechweise, die die Sonderstellung des Begriffes *Parallelität* aufhebt:

- Parallele Geraden haben einen *Fernpunkt* gemeinsam.
- Parallele Ebenen haben eine *Ferngerade* gemeinsam .
- Eine Gerade g hat mit einer zu ihr parallelen Ebene ε einen Fernpunkt auf der Ferngeraden der Ebene gemeinsam.
- Alle Fernelemente liegen in einer Ebene, der *Fernebene* ω .
- Der durch die Fernelemente erweiterte Anschauungsraum heißt *projektiver Raum* P^3 .
- Fernpunkte und Ferngeraden werden durch ein tiefgestelltes u gekennzeichnet (G_u, g_u).

Objekte der Ingenieurswelt werden durch *Projektionen* aus einem *Projektionszentrum* O auf eine *Bildebene* π abgebildet. Hierbei muss gelten: O liegt nicht in π ($O \notin \pi$). Jedem Punkt P , verschieden von O wird der Durchstoßpunkt der Verbindungsgeraden OP mit π als Bildpunkt zugewiesen. Die Verbindungsgeraden OP sind in der Blickrichtung (vom Auge weg zur Bildebene hin) orientiert und heißen in diesem Zusammenhang *Sehstrahlen*. Jede Gerade, die das Zentrum O enthält heißt *projizierend*.

Ist das Projektionszentrum ein eigentlicher Punkt so sprechen wir von *Zentralprojektion* (*Perspektive*). Ist das Projektionszentrum hingegen ein Fernpunkt, so liegt eine *Parallelprojektion* vor.

Das Ergebnis einer Projektion wird *Riss* genannt. Die spezielle Lage von Projektionszentrum und Bildebene zum Objekt bezeichnet man als die *Aufnahmesituation*¹.

2.2 Der Hauptsatz der Axonometrie, Aufbauverfahren

Gegeben seien ein kartesisches Rechtssystem (U, E_x, E_y, E_z) und eine Bildebene π derart, daß bezüglich einer Parallelprojektion p keine Koordinatenebene von (U, E_x, E_y, E_z) projizierend sei. Dann dann gilt bei der Abbildung des dreidimensionalen Anschauungsraumes (man sagt auch des *dreidimensionalen euklidischen Raumes*)

$$p : \mathcal{E}_3 \rightarrow \pi \quad (2.1)$$

daß die drei Geraden $x^p = U^p E_x^p$, $y^p = U^p E_y^p$, $z^p = U^p E_z^p$ paarweise nicht in eine Gerade zusammenfallen (Abb.2.2).

Jeder Raumpunkt P ist im Koordinatensystem durch seine Koordinaten (x, y, z) eindeutig festgelegt. Wir bezeichnen den Quader mit den Ecken $U(0, 0, 0)$, $P_x(x, 0, 0)$, $P_y(0, y, 0)$, $P_z(0, 0, z)$, $P'(x, y, 0)$, $P''(0, y, z)$, $P'''(x, 0, z)$ als seinen *Koordinatenquader*. Jeder Streckenzug aus drei zusammenhängenden Kanten der Koordinatenquaders mit dem Anfangspunkt U und Endpunkt P heißt Koordinatenweg von P . Wegen den beiden wichtigsten Eigenschaften der Parallelprojektion, nämlich der Parallelentreue und der Teilverhältnistreue² kann der Parallelriss P^p eines Punktes P aus den Bildern von $(U^p, E_x^p, E_y^p, E_z^p)$ durch

¹Man denke bei dieser Begriffsbildung an die Fotografie, bei der es für das Foto auch wesentlich ist, wo die Kamera (Filmebene = Bildebene, Objektiv = Projektionszentrum) in Bezug auf das abzubildende Objekt liegt.

²Sind A, B, C drei verschiedene Punkte auf einer Geraden, dann bezeichnet man das Streckenverhältnis $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}$ als Teilverhältnis, $TV(A, B, C)$. Das Teilverhältnis ist eine negative oder positive reelle Zahl, je nachdem der Punkt C zwischen A und B liegt oder nicht. Ist M insbesondere der Mittelpunkt der Strecke \overline{AB} , so gilt $TV(A, B, M) = -1$.

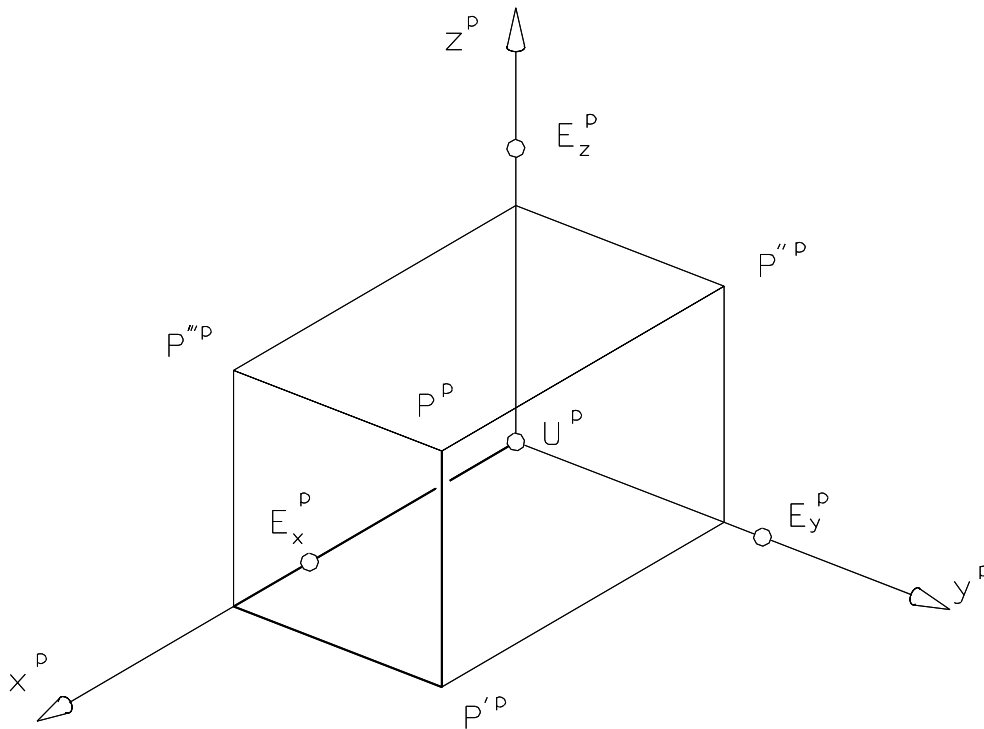


Abbildung 2.2: Axonometrische Angabe, Koordinatenweg

das Bild eines Koordinatenweges ermittelt werden. Daraus leitet sich die *axonometrische Methode (die Axonometrie)* ab:

- Verbinde das Objekt mit einem kartesischen Rechtskoordinatensystem (U, E_x, E_y, E_z)
- Bilde das Koordinatensystem in eine Bildebene ab. Diese Abbildung ist z.B. durch die Bilder des Ursprungs und der drei Koordinateneinheitspunkte $(U^p, E_x^p, E_y^p, E_z^p)$ gegeben (*axonometrische Angabe*). Eine alternative Angabe wäre durch drei schneidende Geraden x^p, y^p, z^p als Bilder der Koordinatenachsen möglich. Dann müssen aber noch die Verzerrungsverhältnisse

$$\lambda = \frac{\overline{U^p E_x^p}}{\overline{U E_x}} = \frac{e_x^p}{e}, \quad \mu = \frac{\overline{U^p E_y^p}}{\overline{U E_y}} = \frac{e_y^p}{e}, \quad \nu = \frac{\overline{U^p E_z^p}}{\overline{U E_z}} = \frac{e_z^p}{e} \quad (2.2)$$

angegeben werden.

- Der Riss jedes weiteren Punktes ist dann über den Riss seines Koordinatenweges festgelegt (*axonometrisches Aufbauverfahren*).

Bemerkungen:

1. Schneiden die Sehstrahlen die Bildebene unter rechtem Winkel, so sprechen wir von *normaler Axonometrie* sonst von *schiefer Axonometrie*.
2. Zur zeichnerischen Behandlung wird eine Kopie (möglicherweise in einem passenden Maßstab) des Parallelrisses in der Zeichenebene angefertigt. Hierbei wählen wir z^p immer parallel zum linken Blattrand orientieren z^p zum oberen Zeichenblattrand orientiert (vgl. Fig. 2.2). Die Blickrichtung weist hierbei vom Zeichner zur Zeichenebene hin.

3. Die konstruktive Auswertung von (2.2) geschieht am besten mit einem *Verzerrungswinkel* (vgl. Abb.2.3). Zeichne eine Halbgerade g mit Randpunkt A und schlage um A einen Kreis vom Radius e (im Beispiel wurde $e = 4\text{cm}$ gewählt). Der Schnittpunkt dieses Kreises mit g sei B . Schlage von B aus die Strecke e_x auf den Kreis ab, der Schnittpunkt sei C . Zeichne $AC = g_1$. Um eine Strecke x zu verzerren, zeichne einen Kreis mit Radius x um A . Dieser Kreis schneidet die Halbgerade g bzw. die Halbgerade g_1 in B_x bzw. C_x , es gilt $\overline{B_x C_x} = x^p$. Aus den ähnlichen Dreiecken (A, B, C) und (A, B_x, C_x) folgt nämlich $e : e_x = x : x^p$, d.h. $x^p = \frac{e_x}{e} x$. Analog konstruiert man die Hilfsgeraden g_2 und g_3 , die zur Verzerrung der y - bzw. z -Koordinaten dienen. Auf diese Weise wurde für $e = 4\text{cm}$, $e_x = 3$, $e_y = 4\text{cm}$, $e_z = 6\text{cm}$ der Punkt $X(6, 4, 2)$ in Abb.2.3 abgebildet.

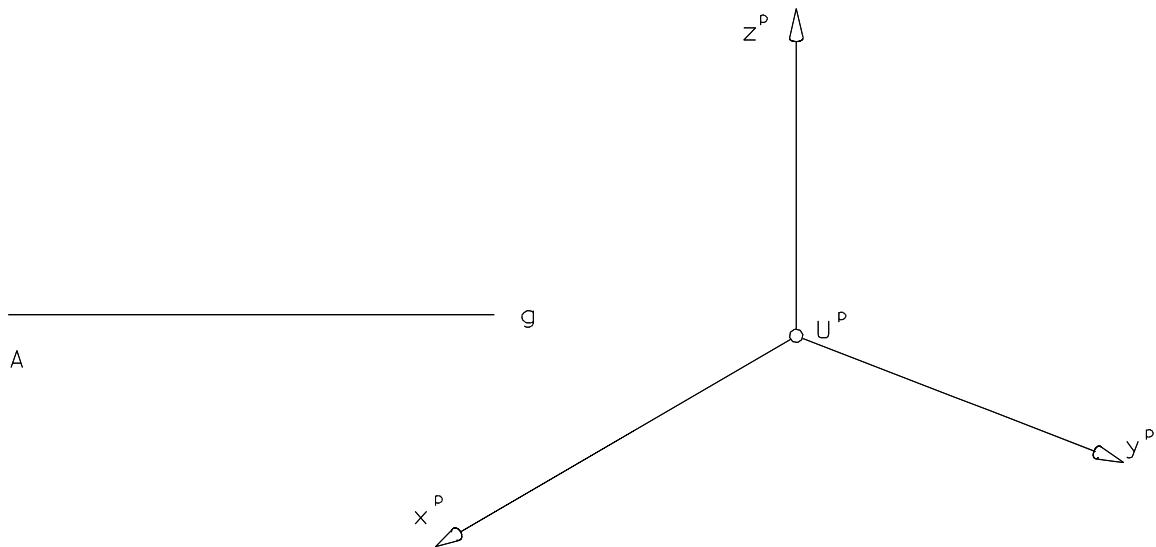


Abbildung 2.3: Koordinatenweg

4. Die in Abb. 2.2 eingezeichneten Punkte P^p , P''^p und P'''^p heißen: *axonometrischer Grundriss*, *axonometrischer Aufriss*, *axonometrischer Kreuzriss* des Punktes P .
5. Für die praktische Anwendung ist der folgende Satz von K. POHLKE wesentlich, den wir hier ohne Beweis angeben:

Satz 2.1 (POHLKE, 1853): *Gibt man die paarweise verschiedenen Achsenbilder und die Verzerrungsverhältnisse λ, μ, ν beliebig vor, so ist das unter Benutzung von (2.2) konstruierte Bild eines Objektes ähnlich zu einem Parallelriss des Objektes.*

Die Bedeutung des Satzes von POHLKE liegt darin, daß durch ihn gewährleistet wird, dass die axonometrische Angabe wirklich beliebig angenommen werden darf und trotzdem gewährleistet ist, dass die vorgegebenen Grundpunkte von einer wohlbestimmten Parallelprojektion eines räumlichen kartesischen Koordinatensystems stammen und damit alle Gesetze der Parallelprojektion (Parallelentreue, Teilverhältnistreue) bei der Konstruktion angewendet werden dürfen.

6. Da die Angabe der Axonometrie nach dem Satz von Pohlke frei gewählt werden darf, sollte man testen ob eine gute Bildwirkung erwartet werden kann. Die Angabe einer Axonometrie ist gut, wenn das Bild des Koordinatenwürfels zum Punkt $E(1, 1, 1)$ unverzerrt wirkt.

7. Sind von den Verzerrungsverhältnissen λ, μ, ν zwei gleich (z.B. $\lambda = \mu$), so spricht man von einer *Dimetrie*, gilt $\lambda = \mu = \nu$, so liegt eine *isometrische Angabe* vor.

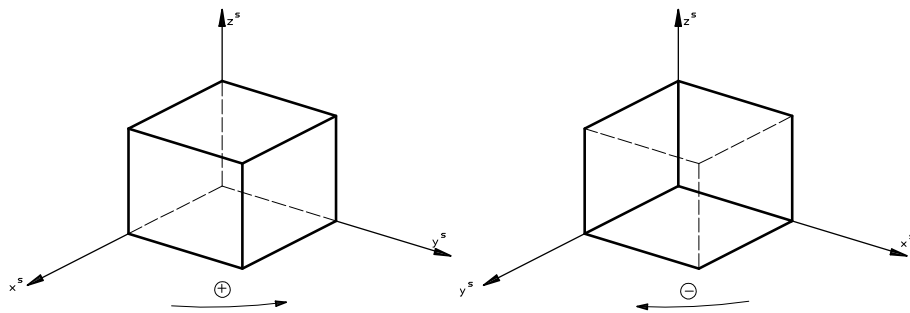


Abbildung 2.4:

Obersicht

Untersicht

8. *Obersicht-Untersicht*: Geht der Orientierungspfeil der x^p -Achse auf kürzestem Weg durch positive Drehung in den Orientierungspfeil der y^p -Achse über, dann liegt eine *Obersicht* (Abbildung 2.4) vor. Erfolgt die Drehung $x^p \rightarrow y^p$ auf kürzestem Weg im negativen Sinn (Abbildung 2.4), dann liegt eine *Untersicht* vor. Hierbei meinen wir, dass die Ober- bzw. Unterseite der xy -Koordinatenebene des Koordinatensystems $\{U, E_x, E_y, E_z\}$ gesehen wird.

2.2.1 Spezielle Angaben für die schiefe Axonometrie

Obwohl der Satz von Pohlke jede denkbare axonometrische Angabe zulässt, haben sich in der technischen Praxis doch eine Reihe von günstigen Angaben bewährt. Einige dieser Angaben sind auch von der ÖNORM berücksichtigt (siehe ÖNORM 6061 bzw. 6240). Dimetrische Axonometrien werden gerne verwendet, während isometrische Annahmen im allgemeinen keine gute Bildwirkung abgeben. Wir erwähnen aber die Isometrie deshalb, weil in den meisten professionellen CAD Paketen isometrische Darstellungen die üblichen 3D-Ansichten sind und beim Aufruf des Befehls 3-D Ansicht voreingestellt sind. Spezielle Angaben sind:

1. *Horizontalaxonometrische Risse*: Man wählt $x^p \perp y^p$ und $e_x = e_y = e$. Figuren in Ebenen parallel zur $[xy]$ -Ebene werden dann unverzerrt abgebildet; in Richtung der z^s -Achse wird i.a. verzerrt. Man nennt diese Annahme auch *Militärriss*. Erprobte Angaben sind:

$$\lambda : \mu : \nu = 1 : 1 : 1; \quad \angle(y^p, z^p) = 150^\circ$$

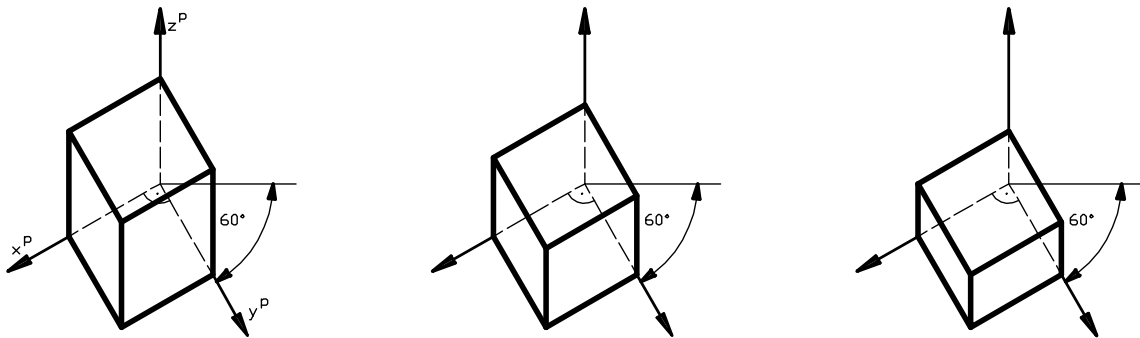
$$\lambda : \mu : \nu = 4 : 4 : 3; \quad \angle(y^p, z^p) = 150^\circ$$

$$\lambda : \mu : \nu = 2 : 2 : 1; \quad \angle(y^p, z^p) = 150^\circ$$

Horizontale Axonometrien werden gerne in der Architektur (speziell Innenarchitektur) verwendet, um eine 3D-Wirkung zu erzielen, wenn z.B. der Grundriss eines Gebäudes, eines Gebäudeensembles oder auch nur eines Raumes gegeben sind.

2. *Frontalaxonometrische Risse*: Man wählt $y^p \perp z^p$ und $e_y = e_z = e$. Figuren in Ebenen parallel zur $[yz]$ -Ebene werden dann unverzerrt abgebildet; in Richtung der x^s -Achse

Horizontalaxonometrische Angabe



Frontalaxonometrise Angaben

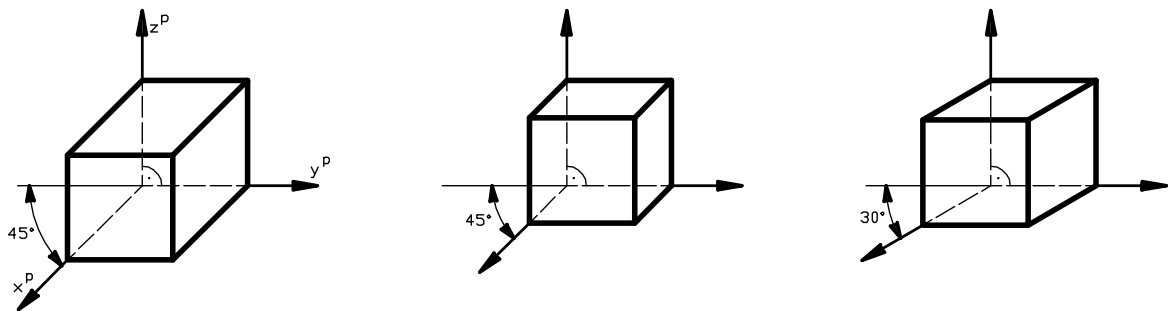


Abbildung 2.5: Spezielle axonometrische Angaben

wird i.a. verzerrt. Man bezeichnet diese Annahme manchmal als *Kavalierriß*. Erprobte Angaben sind:

$$\begin{aligned} \lambda : \mu : \nu &= 1 : 1 : 1; & \angle(x^p, y^p) &= 135^\circ \\ \lambda : \mu : \nu &= 1 : 2 : 2; & \angle(x^p, y^p) &= 135^\circ \\ \lambda : \mu : \nu &= 3 : 4 : 4; & \angle(x^p, y^p) &= 150^\circ \end{aligned}$$

Die z^p -Achse wird hierbei immer vertikal angenommen.

2.2.2 Das Einschneideverfahren von L. ECKHART

Bei diesem Verfahren legt man zwei beliebige Parallelrisse eines Objektes in die Zeichenebene - diese Parallelrisse dürfen sogar in verschiedenen Maßstäben gezeichnet sein - und wählt zwei Projektionsrichtungen; z.B. s' für den ersten Riss und s'' für den zweiten Riss des Objekts. Diese Richtungen nennt man in diesem Zusammenhang *Einschneiderichtungen* und die beiden Parallelrisse *Einschneiderisse*. Das *Einschneiden* erfolgt nun so, dass man bei gegebenem Objektpunkt $P(P', P'')$ durch P' einen Einschneidestrahle der Richtung s' und durch P'' einen Einschneidestrahle der Richtung s'' legt und beide Strahlen zum Schnitt bringt; der Schnittpunkt werde mit P^p bezeichnet. Es gilt nämlich der

Satz 2.2 (L.Eckhart 1938) *Durch Einschneiden von zwei Parallelrissen in zwei beliebigen verschiedenen Richtungen entsteht ein axonometrisches Bild.*

Bemerkungen:

1. Da Grund- und Aufriss nicht in zugeordneter Lage sind, müssen Konstruktionen in diesen Rissen über *geknickte Ordner* erfolgen; dies ist ein gewisser Nachteil dieses Verfahrens.
2. Im Grund- bzw. Aufriss geben die Einschneidestrahlen die Richtung des Sehstrahls an, denn das Bild von (s', s'') ist U^p .
3. Am Bild des Einheitswürfels kann man erkennen, ob beim Einschneiden anschauliche Bilder entstehen.
4. Das Einschneideverfahren von L. ECKHART wird oft auch als *Schnellrissverfahren* bezeichnet.

Ein Beispiel der praxisgerechten Verwendung von axonometrischer Darstellung zeigt die nebenstehende Abbildung. Sie zeigt die eine Explosionsaxonometrie der verschiedenen Stockwerke eines Hochhauses

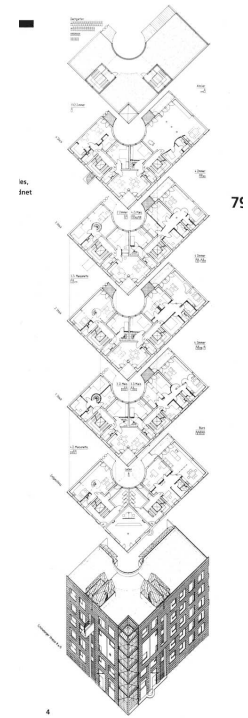


Abbildung 2.6: Explosionsaxonometrie

Beispiel 2.1 Gegeben sind der Grundriss und der Aufriss eines Häuschens - samt zugehörigem Koordinatensystem - und die Einschneiderichtungen s' und s'' . Man stelle das Häuschen im Einschneideverfahren dar.

Konstruktionsbeschreibung: Durch Einschneiden von (U', U'') findet man U^p und ersichtlich ist $U'U^p$, das Bild z^p der z -Achse und $U''U^p$, das Bild x^p der x -Achse des Koordinatensystems. Durch Einschneiden des auf der y -Achse gelegenen Punktes $1(1', 1'')$ wird 1^s und damit das Bild $y^p = U^p1^p$ der y -Achse erhalten. Gibt man noch auf den Achsen in den beiden Normalrissen die Einheitsstrecke e vor, so erhält man durch Einschneiden der Einheitspunkte E_x^p, E_y^p, E_z^p die axonometrische Angabe $\{U^p, E_x^p, E_y^p, E_z^p\}$.

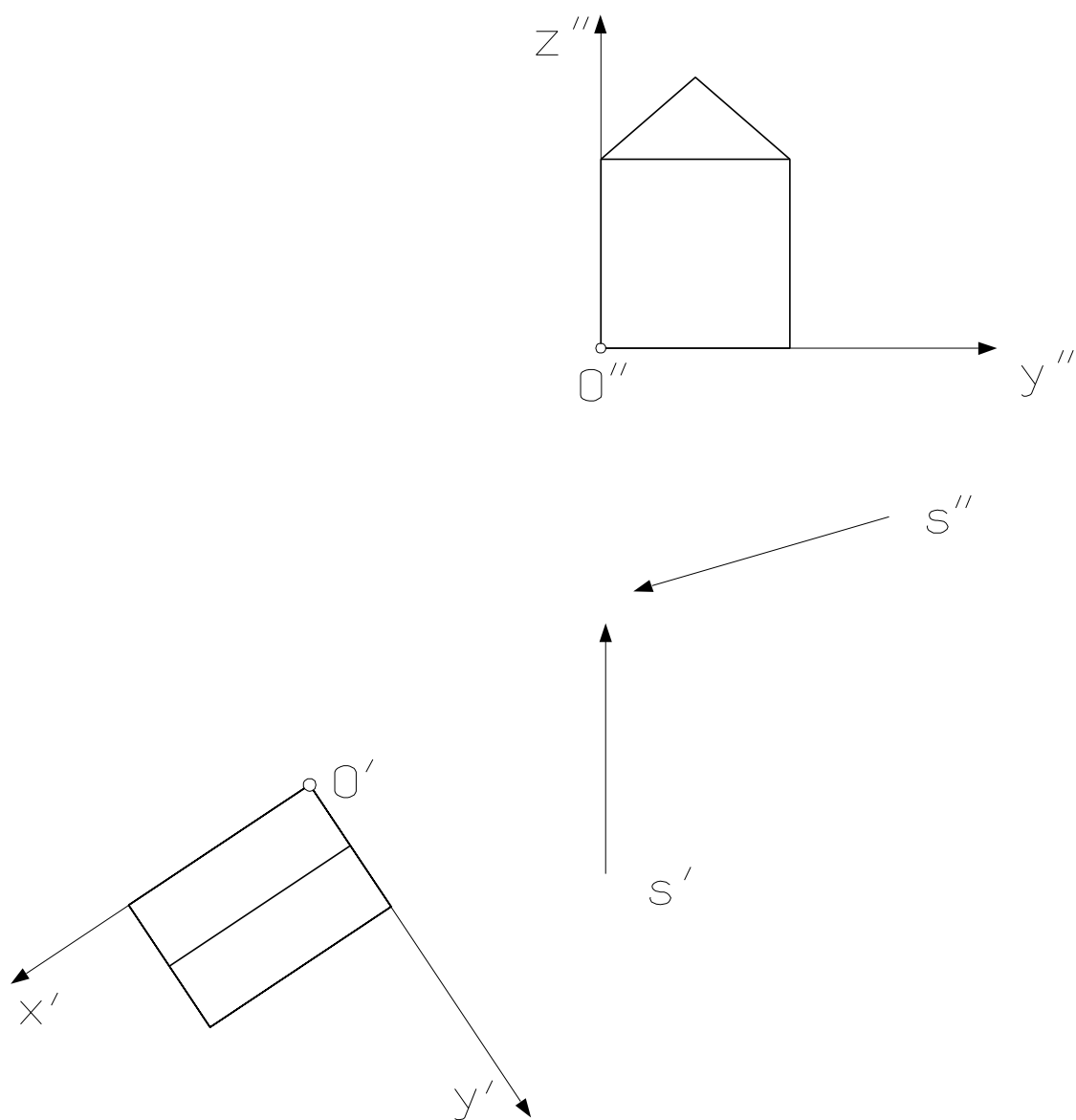


Abbildung 2.7: Schnellrissverfahren

2.3 Normale Axonometrie

Die Angaben zur schiefen Axonometrie sind zwar sehr einfach, doch sind manche Konstruktionen (z.B. die Umrissermittlung von gekrümmten Flächen) recht mühsam. Wir zeigen daher mit der *normalen Axonometrie* ein Abbildungsverfahren, das zwar in der Angabe mehr Aufwand benötigt, aber dann beim eigentlichen Zeichnen wesentlich einfacher ist als die schiefe Axonometrie. Das Verständnis für dieses Abbildungsverfahren ist besonders wichtig, weil es in allen CAD-Systemen bei der 3-D Modellierung eingesetzt wird.

Eine normale Axonometrie entsteht, wenn man ein kartesisches Rechtssystem $\{U, x, y, z; e\}$ normal auf eine Bildebene π projiziert (vgl. Abb. 2.8). Es gelten dieselben Voraussetzungen wie bei der schiefen Axonometrie: π gehe nicht durch U und sei auch zu keiner Koordinatenebene parallel. Wesentliche Einschränkung ist nun, dass man man jetzt das ebene Dreibein $\{U^n, x^n, y^n, z^n, e_x, e_y, e_z\}$ nicht mehr beliebig vorgeben darf. Es muss - da eine Normalprojektion vorliegt - stets $e_x < e$, $e_y < e$, $e_z < e$ gelten.³ Genauer gilt der

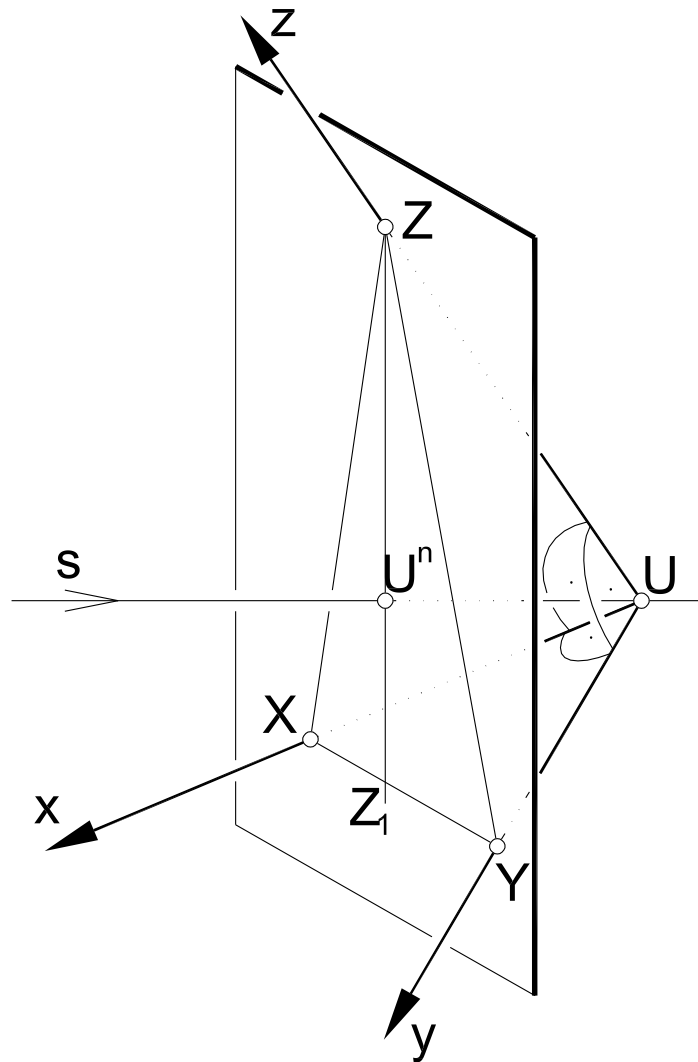


Abbildung 2.8: Normale Axonometrie, Bildspurdreieck

³Dies ist im Gegensatz zur schiefen Axonometrie, bei der ja eine Strecke durchaus auch länger werden kann als sie in Wirklichkeit ist. Man denke nur an den Schattenwurf am späten Nachmittag.

Satz 2.3 *Der Normalriss eines kartesischen Koordinatensystems $\{U, x, y, z\}$ auf eine Bildebene π ($U \notin \pi$, Sehstrahlenrichtung zu keiner Koordinatenebene parallel!) besteht aus drei paarweise verschiedenen orientierten Geraden x^n, y^n, z^n , die sich in U^n schneiden und paarweise stumpfe Winkel bilden.*

Beweis: Wir schneiden die drei von U ausstrahlenden, paarweise aufeinander normalen Achsen x, y, z des Koordinatensystems mit der Bildebene π ; die Schnittpunkte X, Y, Z bilden das sogenannte Bildspurdreieck. Wir zeigen zunächst, dass U^n der Höhenschnittpunkt im Bildspurdreieck ist. Dazu beachte: Es ist $z \perp \pi_1$, wobei π_1 die von der x - und y -Achse aufgespannte Ebene ist. Da XY Hauptgerade von π_1 ist, gilt $z^n \perp XY$. Ebenso zeigt man, dass $x^n \perp YZ$ und $y^n \perp ZX$ gilt; somit ist U^n der Höhenschnittpunkt des Bildspurdreiecks XYZ .

Wir zeigen, dass U^n immer im Innern des Dreiecks $\{X, Y, Z\}$ liegt: Die Normale von U auf die Dreiecksseite XY schneidet die Gerade XY im Fußpunkt Z_1 der Höhe z^n . Da das Dreieck $\{X, Y, U\}$ bei U rechtwinkelig ist, ist Z_1 ein Innenpunkt der Strecke \overline{XY} . U^n liegt auf $\overline{ZZ_1}$ und es gilt: $\overline{ZU^n} < \overline{ZU}$ (da Normalprojektion vorliegt); es ist auch $\overline{ZU} < \overline{ZZ_1}$, da das Dreieck $\{Z, U, Z_1\}$ bei U rechtwinkelig ist; also folgt insgesamt $\overline{ZU^n} < \overline{ZZ_1}$ und U^n ist als Innenpunkt des Bildspurdreiecks nachgewiesen. Da U^n im Inneren des Dreiecks $\{X, Y, Z\}$ liegt, ist das Bildspurdreieck stets spitzwinkelig, und somit bilden die orientierten Höhen $U^n X, U^n Y, U^n Z$ paarweise stumpfe Winkel. \diamond

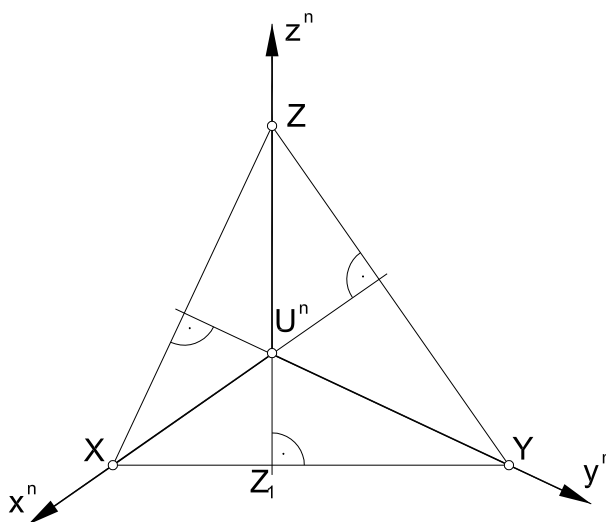


Abbildung 2.9: Zum Satz 2.3

Nun zeigen wir den

Satz 2.4 *Zu einem vorgegebenen spitzwinkligen Bildspurdreieck $\{X, Y, Z\} \subset \pi$ existieren stets zwei zu π symmetrisch gelegene kartesische Koordinatensysteme $\{U, x, y, z\}$ und $\{U^*, x^*, y^*, z^*\}$ mit den Höhen des Bildspurdreiecks als Normalrissen der Koordinatenachsen. Der Normalriss $U^n = U^{*n}$ von U bzw. U^* auf π ist Höhenschnittpunkt des Bildspurdreiecks.*

Beweis: Die Menge der Raumpunkte, von denen aus man die Strecke \overline{XY} unter rechtem Winkel sieht, liegen auf der Thales-Kugel über \overline{XY} , deren Umriss bezüglich π in Abb.2.10 sofort gezeichnet werden kann. Die gesuchten Punkte, von denen aus X, Y und Z je unter rechtem Winkel erscheinen, sind daher die gemeinsamen Punkte der drei Thales-Kugeln $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$, die man über $\overline{XY}, \overline{YZ}$ und \overline{ZX} errichten kann. Drei allgemein liegende Kugeln haben aber genau zwei Schnittpunkte. Diese Punkte gehören auch den drei Ebenen

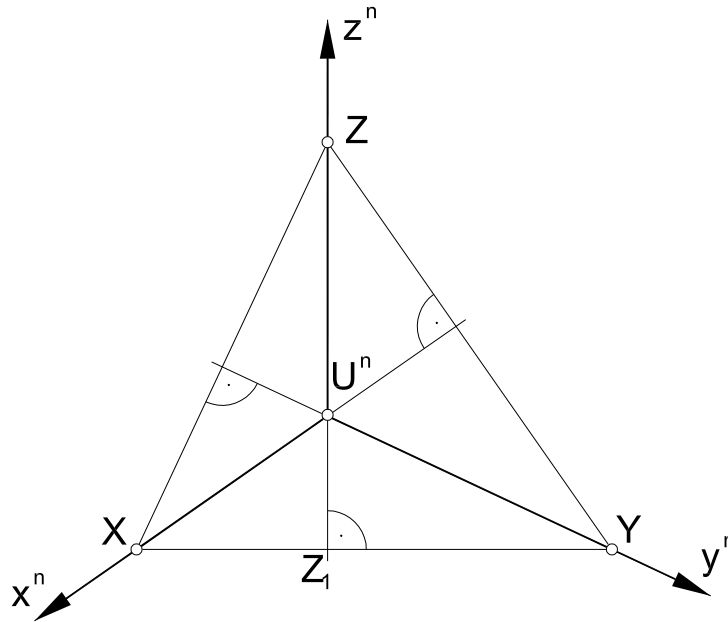


Abbildung 2.10: Zum Satz 2.4

$\epsilon_1 = \kappa_1 \kappa_2$, $\epsilon_2 = \kappa_2 \kappa_3$, $\epsilon_3 = \kappa_3 \kappa_1$ an, die in Abbildung 2.10 projizierend sind; sie schneiden sich in einer Geraden g . g hat mit den drei Kugeln zwei Punkte U und U^* gemeinsam, die Koordinatenursprünge der beiden Lösungskoordinatensysteme sind. Diese Punkte wurden auch in einem Seitenriss in Abbildung 2.10 dargestellt. \diamond

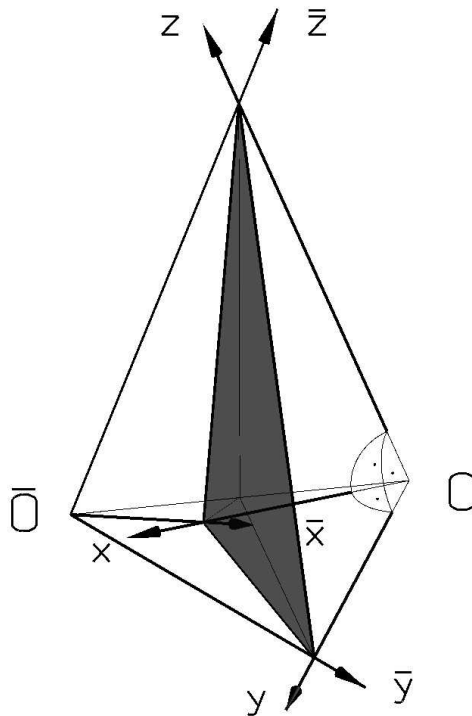


Abbildung 2.11: Räumliche Lage der Koordinatensysteme

Abb. 2.11 zeigt die räumliche Situation der beiden Koordinatensysteme.

2.3.1 Kreise und Kugeln in normaler Axonometrie

Die Abbildung eines Kreises ist in der *normalen* Axonometrie *erheblich einfacher* als in der schiefen Axonometrie. Im Zeitalter des CAD ist die Kreisdarstellung in schiefer Axonometrie bis auf die Sonderfälle des Frontalrisses und des Horizontalrisses von geringer Bedeutung. Wir behandeln daher nur mehr den wesentlich einfacheren Fall der Kreisdarstellung in normaler Axonometrie. Die Kreisdarstellung in normaler Axonometrie ist analog zur Kreisdarstellung in anderen Normalrissen. Das Bild des Kreises ist im Allgemeinen eine Ellipse. Die Hauptachse der Bildellipse ist das Bild jenes Kreisdurchmessers, welcher Hauptgerade ist. Da meist Kreise abzubilden sind, die in Ebenen parallel zu Koordinatenebenen liegen, kann die Hauptachse sofort gezeichnet werden; z.B. für einen Kreis in einer Ebene parallel zur $[xy]$ -Ebene, ist die Hauptachse normal zu z^n . Hat man durch M^n (axonometrisches Bild des Kreismittelpunktes) die Hauptgerade h^n gezeichnet, so darf auf h^n der Kreisradius in wahrer Länge abgetragen werden. Die Endpunkte sind die Hauptscheitel der Bildellipse. Nach Ermittlung eines weiteren Ellipsenpunktes wird die umgekehrte Papierstreifenkonstruktion zur Konstruktion der Nebenachsen angewandt. Es könnte bei der Kreisdarstellung auch die Rytzsche Achsenkonstruktion verwendet werden. In der normalen Axonometrie sollte dies aber nach Möglichkeit vermieden werden.

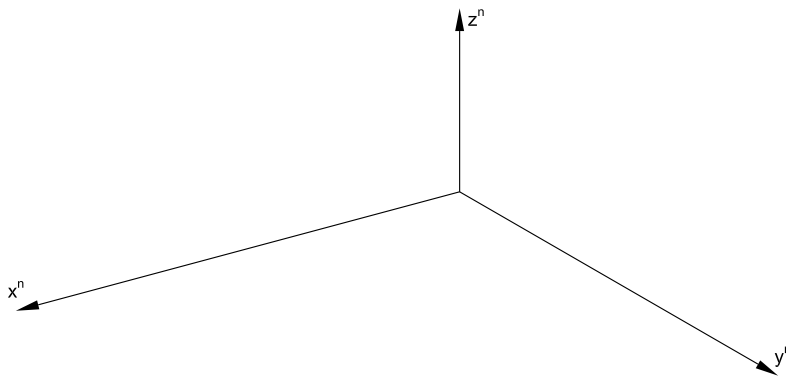


Abbildung 2.12: Konstruktion eines Ellipsenpunktes

Die Ermittlung des benötigten Ellipsenpunktes ist mit folgender Überlegung leicht auszuführen, falls die Trägerebene des Kreises zu einer Koordinatenebene parallel ist (in Abb. 2.12 z.B. zur $[xy]$ -Ebene). Die Hauptachse $\overline{A^n B^n}$ der Bildellipse stammt von einem Kreisdurchmesser $\overline{A_0 B_0}$; wird durch A_0 eine Parallele zur gedrehten Achse x'_0 und durch B_0 eine Parallele zur gedrehten Achse y'_0 gezeichnet, so schneiden sich diese Geraden in einem Kreispunkt P_0 (Satz von Thales). Da die benutzten Eigenschaften bei Parallelprojektion erhalten bleiben, kann man diese Konstruktion im axonometrischen Bild ausführen und gelangt so zum gesuchten Punkt P^n der Bildellipse.

Kugelumriss: Besonders einfach ist die Ermittlung des Kugelumrisses u^n in der normalen Axonometrie: u^n ist ein Kreis um M^n (Bild des Kugelmittelpunktes) vom Radius der Kugel.

Beispiel 2.2 Teil der Dachkonstruktion des Gebäudes der Hafenbehörde Korfu, nach M. DOPLER)

Die Dachkonstruktion besteht aus liegenden Halbdrehkegeln, die in der in Skizze und Foto ersichtlichen Art und Weise angeordnet sind. Man stelle einen Teil der Dachkonstruktion in gegebenen normalen Axonometrie dar.

Konstruktionsbeschreibung: In Abb. 2.15 zeigen wir die prinzipielle Lösung an einem Drehkegel. Die vollständige Lösung erhält man durch Parallelverschiebung und Spiegelung der prinzipiellen Lösung. Wir zeichnen vorerst den Einschneidegrundriss durch Parallel Drehen der xy -Ebene und übertragen die Angabe. Dann wird der Mittelpunkt M des Halbkreises eingeschnitten. Der Basishalbkreis bildet sich in der normalen Axonometrie als eine Ellipse mit dem Mittelpunkt M und der Hauptachse normal auf die x^n -Achse ab. Einen weiteren Ellipsenpunkt erhält man über die in Abbildung 2.12 gezeigte Thaleskreiskonstruktion. Die Umrisserzeugende (Tangente aus S^p an c^p) wird über die Affinität zum Nebenscheitelkreis bestimmt.

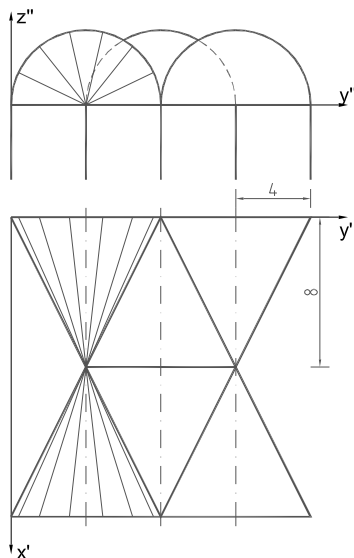


Abbildung 2.13: Angabe Dachkonstruktion

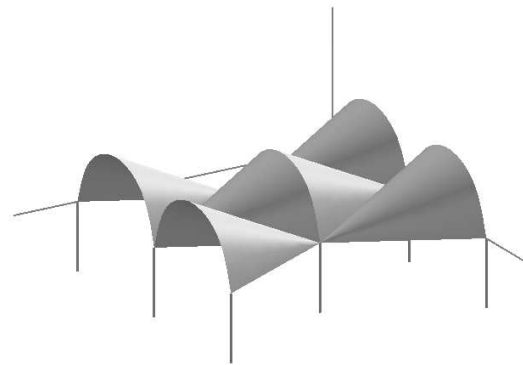


Abbildung 2.14: Lösung

2.3.2 Axonometrie in Computergraphik und CAD

Um mit dem Computer ein normalaxonometrisches Bild darzustellen, sind die *Abbildungsgleichungen* aufzustellen. Wir behandeln ein Verfahren, das es ermöglicht alle normalen Axonometrien zu erreichen. Die Aufrissebene ($[yz]$ -Ebene) sei im folgenden immer die feste Bildebene. Die Projektionsrichtung sei gegen die x -Achse, normal auf die Aufrissebene. Für diese Projektion gelten dann offensichtlich die Abbildungsgleichungen:

$$x = 0, \quad y'' = y, \quad z'' = z \quad (2.3)$$

Wir bringen den Objektraum nun durch eine Folge von Drehungen in allgemeine Lage zur Bildebene. Vorerst drehen wir um die z -Achse, was die Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \cos \varphi - y \sin \varphi \\ y_1 &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \\ z_1 &= z \end{aligned} \quad (2.4)$$

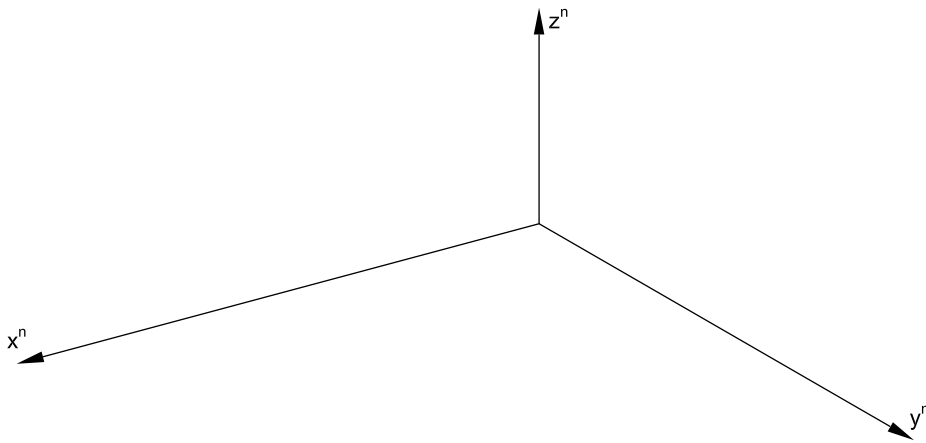


Abbildung 2.15: Konstruktion Beispiel 2.2

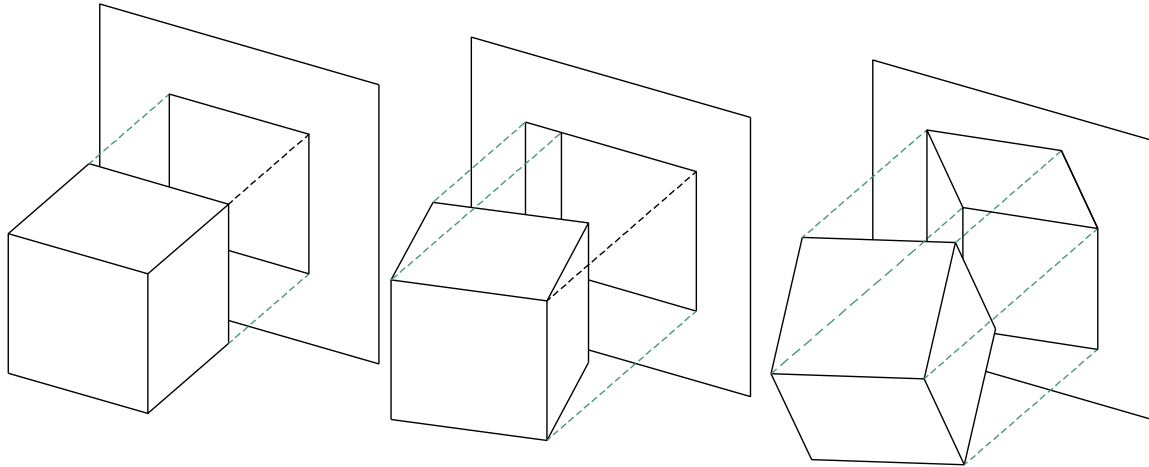


Abbildung 2.16: CAD-Drehungen des Einheitswürfels

nach sich zieht. Danach kippen wir um die y-Achse:

$$\begin{aligned}x_2 &= x_1 \cos \psi - z_1 \sin \psi \\y_2 &= y_1 \\z_2 &= x_1 \sin \psi + z_1 \cos \psi\end{aligned}\tag{2.5}$$

Die Zusammensetzung von 2.4 und 2.5 liefert die gesuchten Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned}x_2 &= x \cos \psi \cos \varphi - z \sin \psi \\y_2 &= x \sin \varphi + y \cos \varphi \\z_2 &= x \sin \psi \cos \varphi + z \cos \psi\end{aligned}\tag{2.6}$$

Die Wirkung der dargestellten Transformationen auf den Einheitswürfel ist in Abbildung 2.16 zu sehen.

Möchte man nun ein Objekt am Computer darstellen, so ist auf jeden Punkt die Transformation 2.6 anzuwenden. Die Bildkoordinaten sind dabei nach 2.6 $y'' = y_2$ und $z'' = z_2$. x_2 gibt den Abstand eines Punktes von der Bildebene an. $-\pi < \varphi < \pi$ und $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$ sind die beiden Parameter um die Bildwirkung zu steuern. Abbildung 2.17 zeigt die Auswirkung der Änderungen der beiden Parameter am Bild des Einheitswürfels.

In verschiedensten CAD-Systemen werden normalaxonometrische Darstellungen verwendet um die Anschaulichkeit zu erhöhen. Wir behandeln zum Abschluss dieses Abschnittes kurz die Angabe von Axonometrien in diesen Zeichenpaketen. Meist ist nur ein Punkt anzugeben um eine Axonometrie festzulegen. Die entstehende Axonometrie ist dann eine normale Axonometrie mit dem zu diesem Punkt gehörenden Ortsvektor als Sehstrahlrichtung und der Bildebene normal auf diese Richtung. Oft wird auch die Sehstrahlrichtung durch Kugelkoordinaten festgelegt. Beide Angabemöglichkeiten zeigt die Abbildung 2.18.

In manchen CAD-Systemen gilt aber auch die allen bisherigen Überlegungen zugrundeliegende Annahme nicht mehr, dass nämlich die z-Achse des Bildkoordinatensystems parallel zum linken Bildschirmrand liegen soll. Dann liegt aber eine Drehung um eine

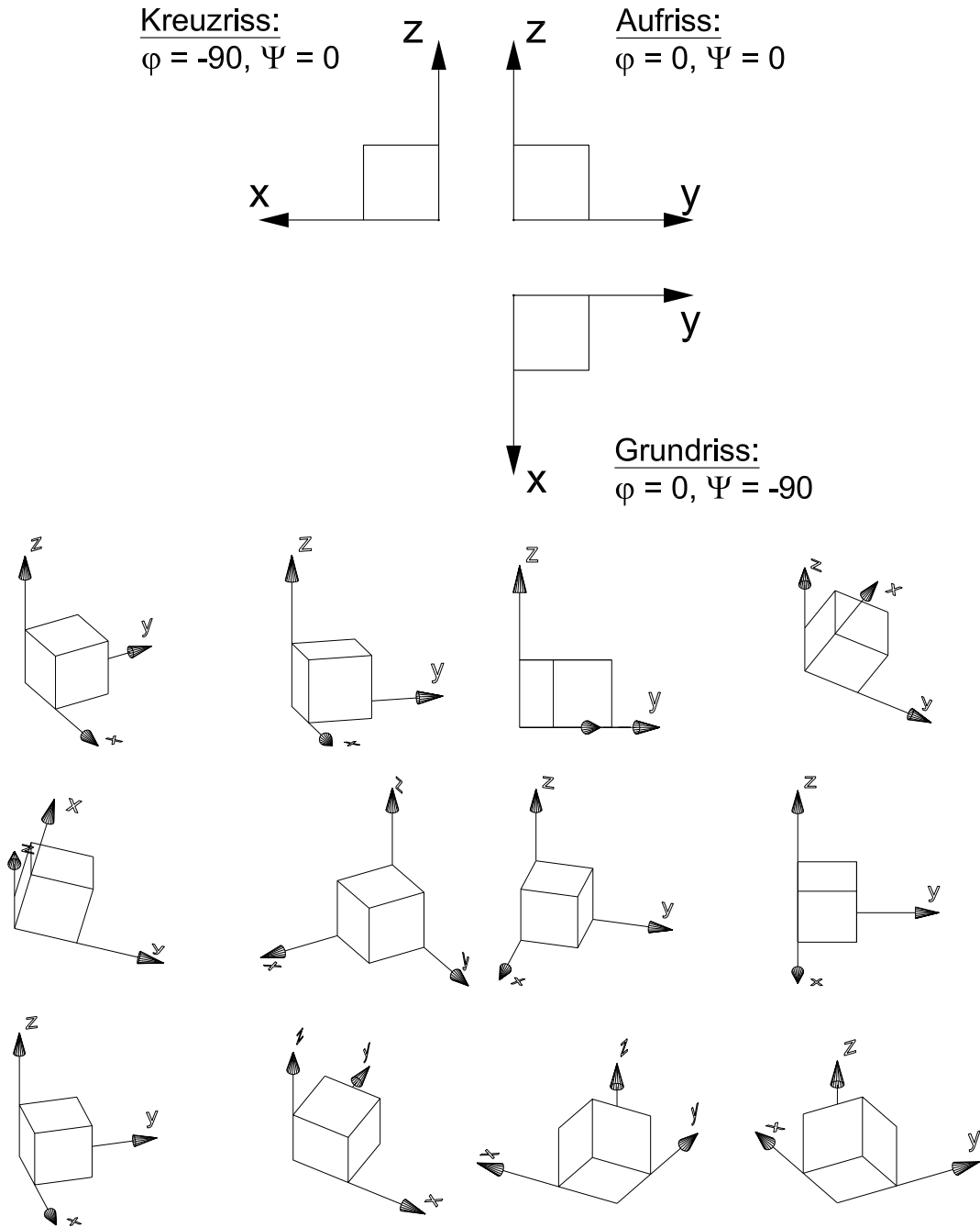


Abbildung 2.17: CAD-Drehungen des Einheitswürfels

allgemeine Drehachse vor. Man hat den beiden Drehungen 2.5 und 2.6 noch eine dritte Drehung um eine Koordinatenachse hinzuzufügen. Die könnte z.B. eine Drehung um die neue z-Achse sein. Die Drehmatrix würde wie 2.5 aussehen, nur der Drehwinkel müsste mit einem anderen Symbol belegt werden. Hierbei kommt es zur Anwendung eines allgemeinen Satzes der Kinematik, der aussagt, dass jede Drehung um einen festen Punkt durch drei Elementardrehungen erzeugt werden kann. In AutoCad z.B. ist diese Freiheit über den Befehl 3D-Orbit eingebaut. Man kann sich dabei den Befehl so vorstellen, dass um die ganze Szene eine Glaskugel gelegt wird die an der Stelle, wo sie angeklickt wird, einen Henkel bekommt. Mit diesem Henkel wird ein sphärisches Gelenk erzeugt um dessen Mittelpunkt die ganze Szene gedreht werden kann. (Abbildung 2.19).

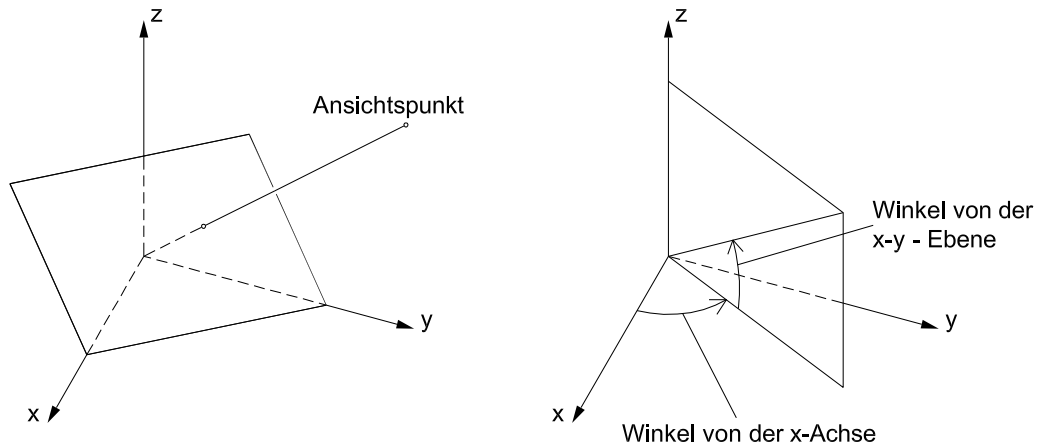


Abbildung 2.18: 3D-Ansichtsangabe in CAD-Systemen

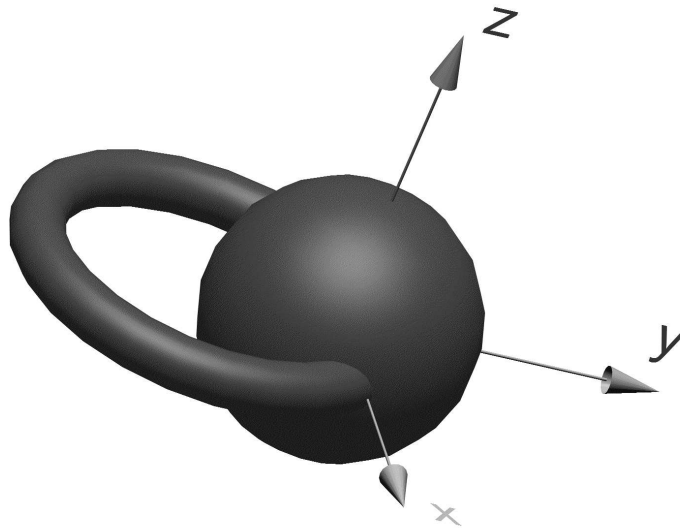


Abbildung 2.19: 3D-Orbit in AutoCAD

2.3.3 Schiefe Axonometrie - Normale Axonometrie

Zum Abschluss des Kapitels werden einander in diesem Abschnitt schiefe und normale Axonometrie kurz gegenübergestellt.

Die schiefe Axonometrie ist in der Praxis nur zu empfehlen, wenn Objekte mit lauter ebenen Begrenzungsflächen abgebildet werden sollen.

Die frontale Axonometrie oder auch der Militärriss sind günstig anzuwenden, wenn krumme Linien am Objekt nur in Parallelebenen zur unverzerrt abgebildeten Koordinatenebene vorkommen.

In allen anderen Fällen ist die normale Axonometrie als Abbildungsverfahren - trotz etwas aufwendiger Vorbereitungsarbeit - zu empfehlen, denn:

- Schiefaxonometrische Bilder wirken oft stärker verzerrt als normalaxonometrische.
- Zur Kreiskonstruktion in schiefer Axonometrie braucht man - abgesehen von Sonderfällen - die Rytz-sche Achsenkonstruktion.

- Die Nebenachse des Kreisbildes in schiefer Axonometrie fällt nicht mehr mit dem Bild der Kreisachse zusammen. Die Umrisspunkte vom Drehzylindern liegen deshalb meist nicht in den Hauptscheiteln der Bilder der Abschlusskreise (Abbildung 2.20).

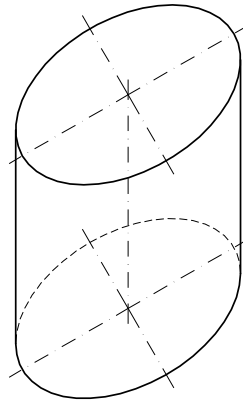


Abbildung 2.20: Drehzylinderumrisserzeugende in schiefer Axonometrie

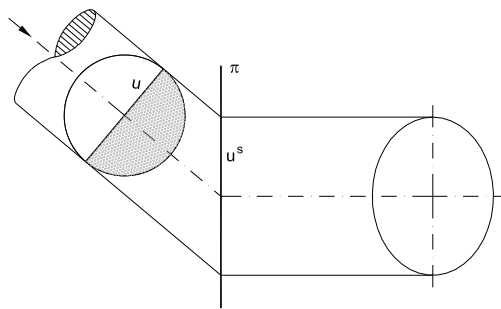


Abbildung 2.21: Kugeldarstellung schiefer Axonometrie

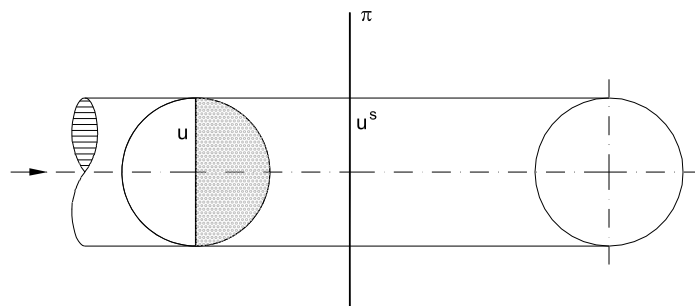


Abbildung 2.22: Kugeldarstellung in normaler Axonometrie

- der Kugelumriss ist in schiefer Axonometrie eine Ellipse (Abbildung 2.21) und in normaler Axonometrie ein Kreis (Abbildung 2.22).