Kapitel 6

Topologische Eigenschaften von Raumobjekten

6.1 Einleitung

Die Freiformkurven und Freiformflächen des vorletzten Abschnittes haben die wesentliche Eigenschaft, dass sie im Designprozess deformiert werden können. Dabei gehen viele Eigenschaften verloren, die wir bisher behandelt haben, wie z.B. Längenmaße, Winkelmaße, Flächenmaße . Nun können wir uns fragen: gibt es vielleicht dennoch Eigenschaften dieser Objekte, die sich mathematisch präzise fassen lassen und nicht verändert werden? Mit mathematischen Eigenschaften von deformierbaren Objekten beschäftigt sich die *Topologie*. Denken wir und das Objekt (z.B. eine Kurve, eine Fläche ein Solid) aus beliebig deformierbarem, aber völlig unzerreißbarem und unverklebbarem Material hergestellt, dann fragen wir nach Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man diese Objekte beliebig deformiert. Beispielsweise werden solche Eigenschaften gleichzeitig auf eine Kugel, ein Ellipsoid, einen Quader oder ein Tetraeder zutreffen, da sie alle ineinander deformiert werden können. Stellen wir uns dazu den Quader aus Gummi hergestellt vor und blasen den Gummiquader auf. Irgendwann werden wir eine Kugel bekommen.
Wir werden uns in diesem Abschnitt aber nicht nur mit topologischen Konzepten auseinandersetzen, sondern auch noch einige andere wichtige Konzepte zur mathematischen Beschreibung von Objekten kennenlernen. Als Einstieg zitieren wir hier die Geschichte von Flatland nach E.A. Abbott (Flatland, A Romance of Many Dimensions, Dover, New York, 1952, Original: Text by Edwin A. Abbott, 1884) entnommen aus dem Buch "The Shape of Space" von J. Weeks:

Flatland

In 1884 an extraordinary individual named A Square succeeded in publishing his memoirs. Actually an intermediary by the name of Abbott published them for him. A Square himself was in prison for heresy at the time. A Square was extraordinary not because he had such an odd name, but rather because he had such a descriptive and accurate name. For you see, A Square was a square (Figure 6.1). Now you might be wondering just where A Square lived. After all, you wouldn't expect to find a two-dimensional square living in a three-dimensional universe such as ours. You might allow for a slightly thickened square, say a creature with the dimensions of a sheet of paper, but certainly not a completely flat individual like A Square. Anyhow, A Square didn't live in our three-dimensional universe. He lived in Flatland, a two-dimensional universe resembling a giant plane.
Flatland also happens to be the title under which A Square's memoirs were published. lt's now

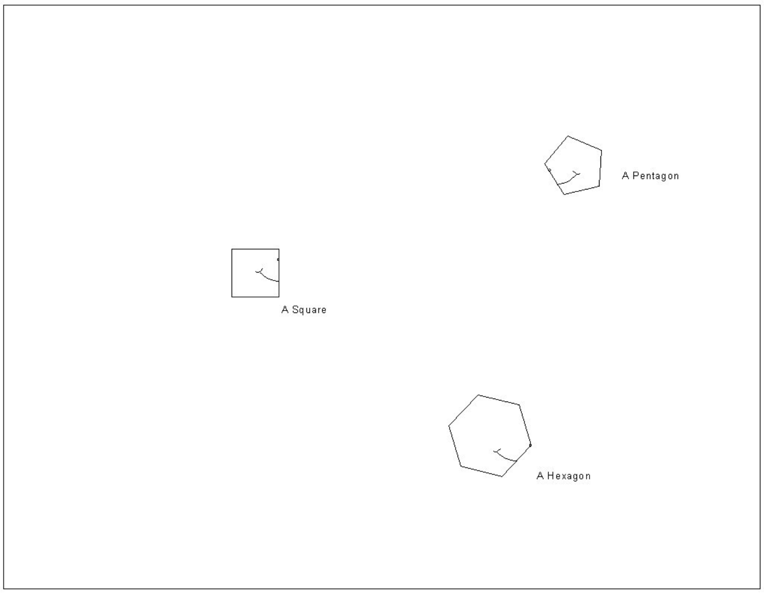

Abbildung 6.1: Flatland

available in paperback, and I recommend it highly. In 1907 C. H. Hinton published a similar book, An Episode of Flatland. The chief difference between these books is that the residents of Flatland proper can move freely about their two-dimensional universe, whereas the inhabitants of Hinton's world are constrained by gravity to living on the circular edge of their disk-shaped planet Astria (Figure 6.2).

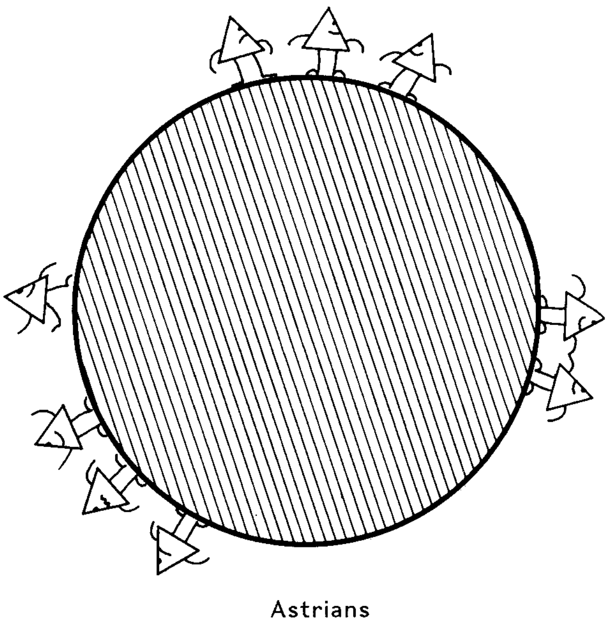

Abbildung 6.2: Astria

For the full story on the lore of Astria, see A. K. Dewdney's The Planiverse. Getting back to the subject at hand, the Flatlanders all thought that Flatland was a giant plane, what we Spacelanders would call a Euclidean plane. To be accurate, I should say that they assumed that Flatland was a plane, since nobody ever gave the issue any thought. Well, almost nobody. Once a physicist by the name of A Stone had proposed an alternative theory, something about Flatland having a finite area, yet having no boundary. He compared Flatland to a circle. For the most *part people didn't understand him. It was obvious that a circle had a finite circumference and no endpoints, but what did that have to do with Flatland, which obviously had an infinite area? At least part of the problem was linguistic: The only word for "plane" was the word for "Flatland" itself, so to express the idea that Flatland was not a plane, one was trapped into stating that "Flatland is not Flatland". Needless to say, this theory attracted few disciples. A Square, though, was among the few. He was particularly intrigued by the idea that a person could set out in one direction and come back from the opposite direction, without ever having turned around. He was so intrigued that he wanted to try it out. The Flatlanders were for the most part a timid lot, and few had ever travelled more than a day or two's journey beyond the outlying farms of Flatsburgh. A Square reasoned that if he were willing to spend a month tromping eastward through the woods, he might just have a shot at coming back from the west. He was delighted when two friends volunteered to go with him. The friends, A Pentagon and A Hexagon, didn't believe any of A Square's theories; they just wanted to keep him out of trouble. To this end they insisted that A Square buy up all the red thread he could find in Flatsburgh. The idea was that they would lay out a trail of red thread behind them, so that after they had travelled for a month and given up, they could then find their way back to Flatsburgh. As it turned out, the thread was unnecessary. Much to A Square's delight–and A Pentagon's and A Hexagon's relief–they returned from the west after three weeks of travel. Not that this convinced anyone of anything. Even A Pentagon and A Hexagon thought that they must have veered slightly to one side or the other, bending their route into a giant circle in the plane of Flatland (Figure 6.3).*

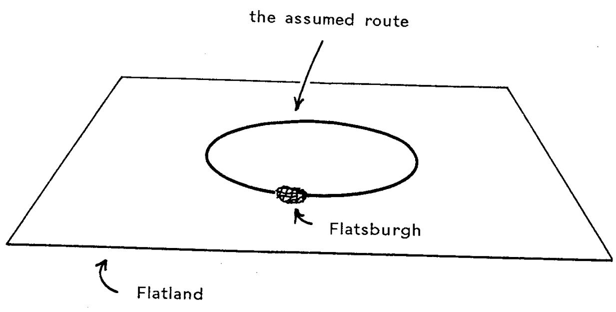

Abbildung 6.3: The first journey

A Square had no reply to their theory, but this did little to dampen his enthusiasm. He was ready to try it again! By now red thread was in short supply in Flatland, so this time A Square laid out a trail of blue thread to mark his route. He set out to the north, and, sure enough, returned two weeks later from the south. Again everyone assumed that he had simply veered in a circle, and counted him lucky for getting back at all. A Square was mystified that his journey was so much shorter this time, but something else bothered him even more: he bad never come across the red thread they laid out on the first journey. The physicists of Flatland were equally intrigued. They confirmed that even if Flatland were a so-called "hypercircle" as A Stone had suggested, the two threads would still cross (Figure 6.4).

There was, of course, the possibility that the red thread had broken for one reason or another. To investigate this possibility, the scientists formed two expeditions: one party retraced the red thread, the other retraced the blue. Both threads were found to be intact. The mystery of the nonintersecting threads remained a mystery for quite a few years. Some of the bolder Flatlanders even took to retracing the threads Periodically as a sort of pilgrimage. The first hint of a resolution came when a physicist proposed that Flatland should be regarded neither as a "Flatland" (i.e. a plane) nor as a hypercircle but as something he called a "torus". At first no one had any idea what he was talking about. Gradually though, people agreed that this theory

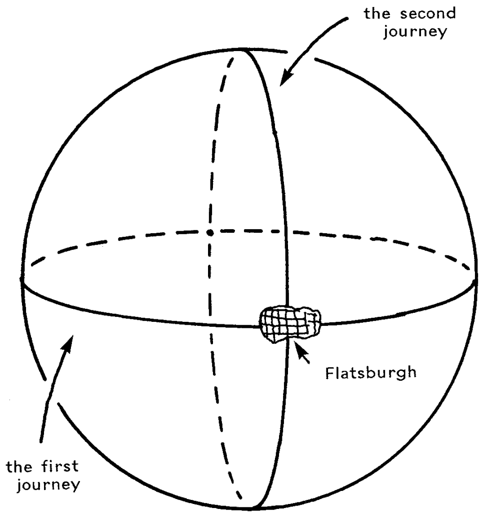

Abbildung 6.4: The second journey

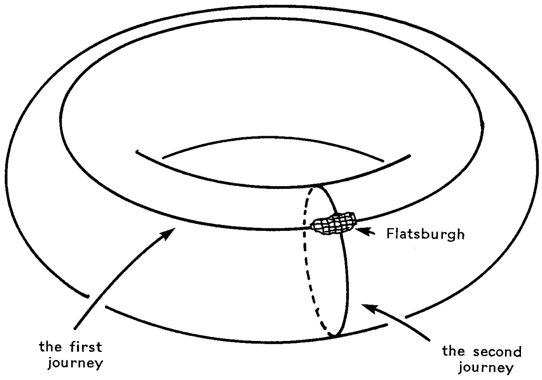

Abbildung 6.5: Flatland with torus shape

resolved the mystery of the nonintersecting threads, and everyone was happy about that. So for many years Flatland was thought to be a torus (Figure 6.5).
Until one day somebody came up with yet another theory on the "shape " of Flatland. This theory explained the mystery of the nonintersecting threads just as well as the torus theory did, but it gave a different overall view of Flatland. And this new theory was just the first of many. For the next few months people were constantly coming up with new possibilities for the shape of Flatland (Figure 6.5).....

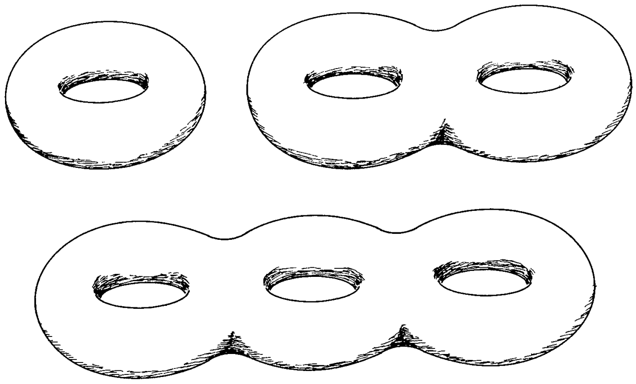

Abbildung 6.6: Other possible shapes of flatland

Die Torus-Form von Flatland mag etwas seltsam erscheinen, dass das von unserem Erfahrungen nicht so ganz weit weg ist, mag folgendes Beispiel zeigen (Abb. 6.7). Bei manchen Computerspielen agiert das Spielobjekt (hier ein Flugzeug)auf die folgende Art und Weise: wenn es z.B. am oberen Rand des Bildschirmes ankommt, dann wechselt es an den unteren Rand genau auf den gegenüber liegenden Punkt und setzt die Fahrt fort. Wie läßt sich diese Sichtweise der Programmierer erklären?
Wenn die obere und die untere Kante des Bildschirms miteinander identifiziert werden, dann ist der Bildschirm einem Zylinder äquivalent (Abb. 6.7).
Identifiziert man nachher noch den rechten und den linken Rand (der inzwischen zu einem Kreis gebogen ist), dann erhält man einen Torus. Analog zur Form von Flatland haben die

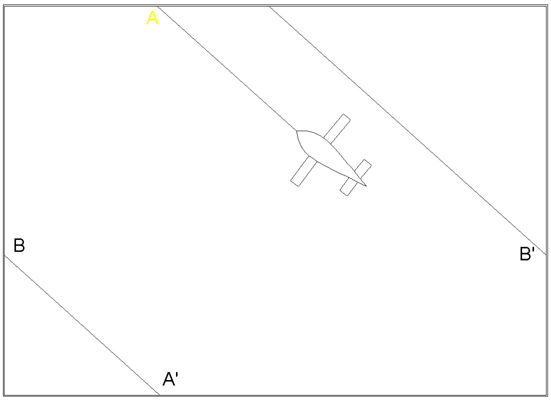

Abbildung 6.7: Flugbahn bei einem Computerspiel

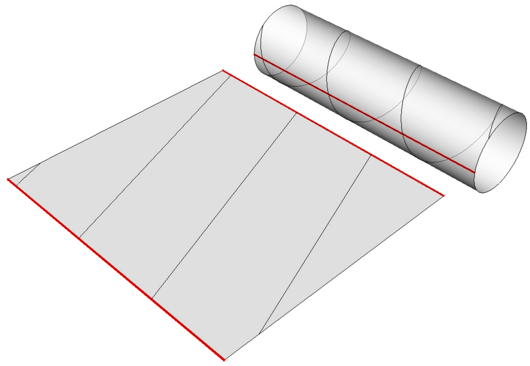

Abbildung 6.8: Identifikation von oberer und unterer Kante des Bildschirms

Programmierer diese Computerspiels den Bildschirm mit der Topologie eines Torus versehen. Nimmt man daher ein Rechteck und identifiziert gegenüberliegende Seiten wie in Abbildung

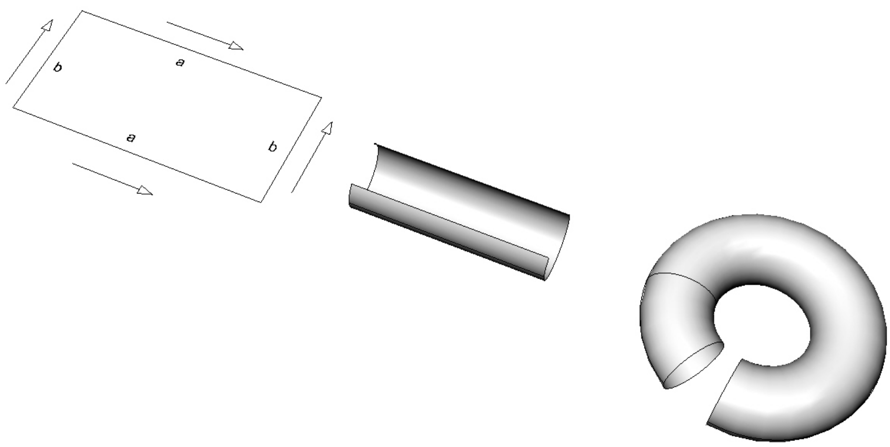

Abbildung 6.9: Flacher Torus

6.9, dann hat man ein einfaches topologisches Modell eines Torus.

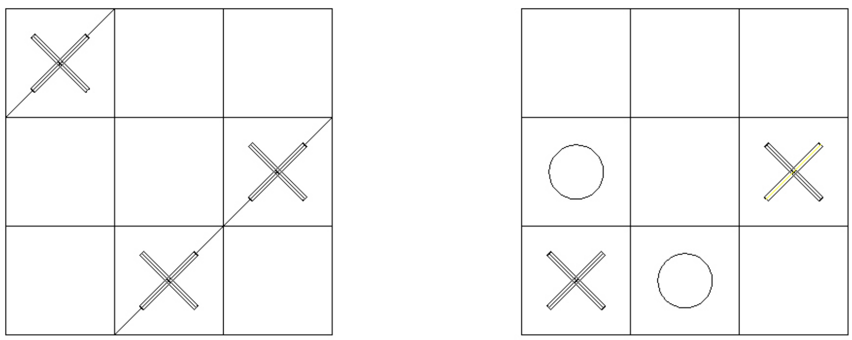

Abbildung 6.10: Tic-Tac-Toe

Ein anderes hübsches Beispiel bietet da Spiel Tic-Tac-Toe auf dem Torus. Ziel bei diesem Spiel ist es drei Kreuze in einer Reihe zu machen (diagonal ist auch erlaubt). Abb.6.10 zeigt links

eine Gewinnsituation. Wie müssen die Spieler das nächste Kreuz bzw. den nächsten Kreis beim rechten Spiel setzen um zu gewinnen?
Das oben eingeführte Verfahren zur Erzeugung eines topologischen Modells des Torus läßt sich weiter ausbauen, indem man verschiedene Zuordnungen der Seiten des Ausgangsrechteckes zuläßt. Betrachten wir dazu die folgende Zuordnung: Diese Zuordnung liefert offensichtlich

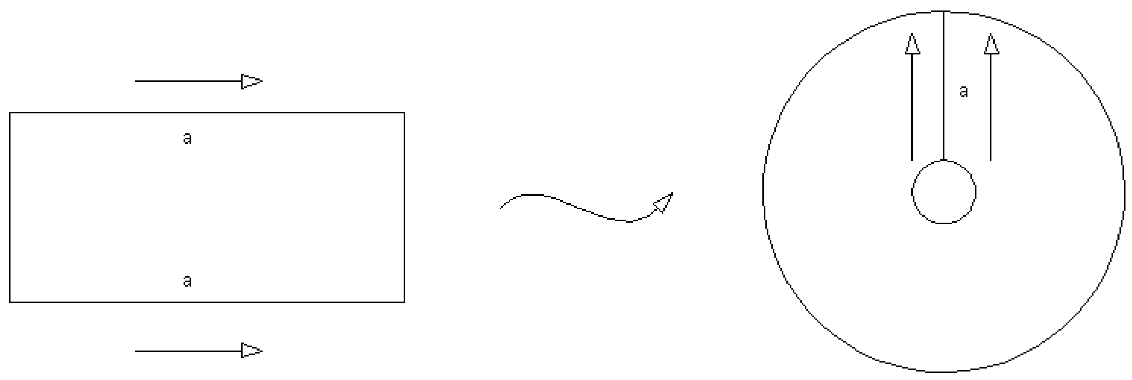

Abbildung 6.11: Möbiusband

einen Kreisring und dieser ist dem Zylinder von vorhin topologisch äquivalent. Dass dies der Fall ist sieht man so ein: man denke sich den Kreisring aus Gummi mit einer Randkurve in der Ebene befestigt und ziehe den anderen Randkreis aus der Ebene heraus. Was sind nun die wesentlichen Unterschiede zum Torus? Da wir nur ein Paar von Seiten identifiziert haben besitzt die entstehende Fläche zwei Randkurven. Sie ist nicht geschlossen sondern offen, während der Torus keine Randkurven besitzt und daher geschlossen ist. Torus und Kreisring sind ganz offensichtlich durch keine topologische Transformation ineinander überführbar. Wir halten fest:

Offene Flächen haben Randkurven. Sie könne durch keine topologische Transformation in geschlossene Flächen übergeführt werden.

Eine weitere Möglichkeit der Zuordnung zeigt Abb. 6.12:

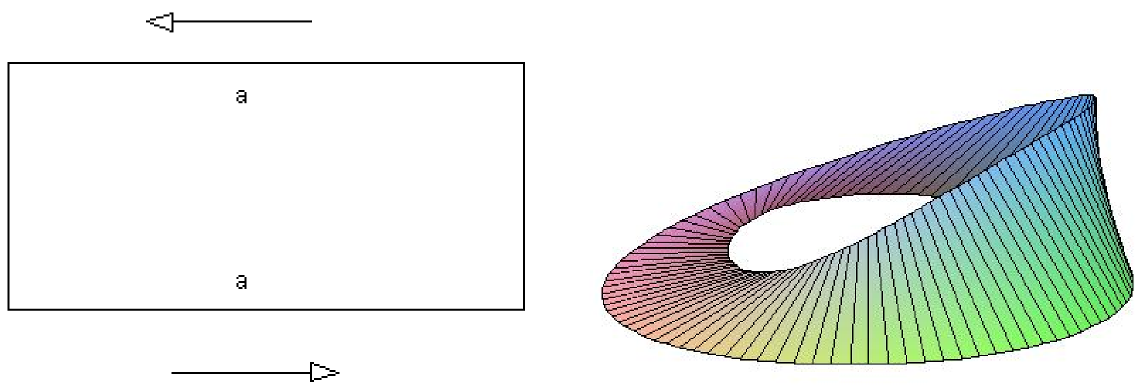

Abbildung 6.12: Möbiusband

Ganz offensichtlich erhält man das räumliche Objekt wenn man einen Streifen Papier nimmt und vor dem Zusammenkleben von zwei Rändern um 180° verdrillt. Die entstehende Fläche ist

ebenfalls nicht mehr geschlossen, sie hat aber nur einen Rand, denn wie man leicht nachprüfen kann ist die Randkurve eine geschlossene Kurve. Die Fläche heißt *Möbiusband*[1]. Das Möbiusband führt uns auf weitere wichtige topologische Begriffe: Es ist leicht festzustellen, dass es *einseitig* ist. Dazu betrachte man einen geschlossenen Weg auf der Fläche, stelle sich die Fläche als eine dünne Membran materialisiert vor (was natürlich nicht ganz richtig ist!) und betrachte einen Käfer der diesen Weg entlangkrabbelt. Nach einem Umlauf wird der Käfer auf der anderen Seite der Membran sein! Einseitige Flächen lassen sich durch einen anderen topologischen Begriff charakterisieren für den man das Vehikel der Membran nicht braucht: Wir betrachten dazu eine geschlossene Kurve auf dem Möbiusband und denken uns um jeden Punkt der Kurve eine geschlossene Kurve (z.B. einen Kreis) gezogen. Der Kreis sei mit einem Durchlaufsinn versehen. Wenn man nun die Kurve in einer Richtung abläuft und dabei für alle Punkte der Kurve der Durchlaufsinn derselbe ist, dann heißt die Fläche *orientierbar*. Eine einseitige Fläche kann nun niemals orientierbar sein. Wir betrachten dazu das Möbiusband im Rechtecksmodell (Abb. 6.13) und ziehen eine geschlossene Kurve, die die Bahn des Mittelpunktes eines orientierten Kreises sein soll. Der orientierte Kreis erfährt beim Durchlaufen der geschlossenen Kurve eine Änderung des Durchlaufsinnes.
Beim Durchlaufen einer geschlossenen Kurve einer nichtorientierbaren Fläche ergibt sich ein weiteres intteressantes Phänomen: Wenn man auf einer Seite der Kurve startet, dann kommt man nach einem Durchlauf auf der anderen Seite wieder an. Würde man die Kurve als einen Flusslauf betrachten und z.B. am rechten Flussufer starten, dann würde man am linken Flussufer zurückkehren ohne den Fluss über quert zu haben. Man bezeichnet geschlossene Kurven auf einer nichtorientierbaren Fläche als *einufrige Kurven*.

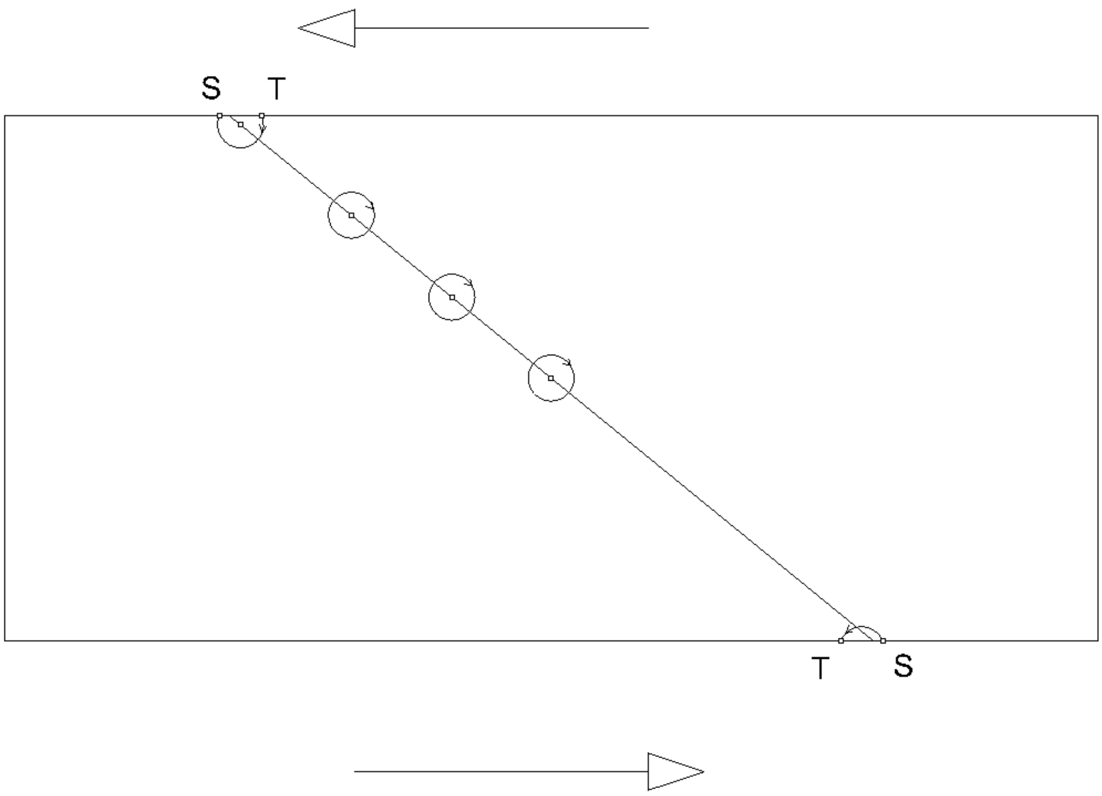

Abbildung 6.13: Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes

[1]Eine Parameterdarstellung dieser Fläche findet sich im Kapitel differentialgeomnetische Eigenschaften von Kurven und Flächen.

Bemerkung 6.1.1 *Diese Eigenschaft hätte eine überaus interessante Konsequenz für Flatland wenn es ein Möbiusband wäre. A Square wäre nämlich in diesem Fall nach seiner Reise als sein eigenes Spiegelbild nach Flatsburg zurückgekommen!*

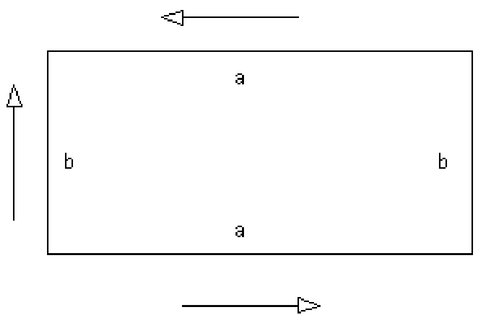

Abbildung 6.14: Klein'sche Fläche

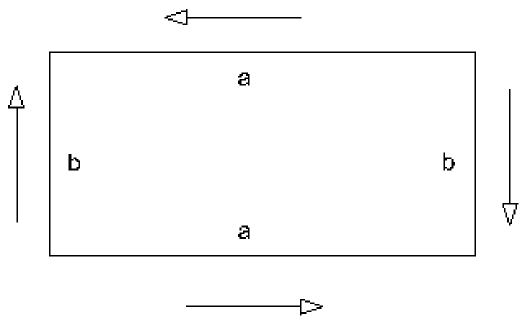

Abbildung 6.15: Projektive Ebene

Zwei weitere Möglichkeiten aus einem ebenen Rechteck ein Modell einer topologischen Fläche zu erzeugen zeigen die Abbildungen 6.14 und 6.15. Da in beiden Fallen alle Seiten des Ausgangsrechteckes in irgendeiner Weise miteinander identifiziert sind sind beide Flächen geschlossen und da es für beide orientierungsumkehrende Pfade gibt sind beide Flächen nicht orientierbar. Abbildung 6.14 ist ein topologisches Modell der berühmten *Klein'schen Fläche.* Ähnlich wie wir aus dem flachen Torus ein 3-D Modell erzeugen konnte, so können wir auch bei der Klein'schen Fläche ein 3D-Modell erzeugen. Der Vorgang ist in der Abb. 6.16 gezeigt[2]. WEir kleben zuerst die beiden gleich orientierten Seiten aufeinander zu einem Zylinder den wir allerdings noch auf einer Seite etwas aufblasen. Nun ist zu beachten, dass auf den nun zu verklebenden Seiten (Kreisen nach den erste Klebvorgang!) eine Umkehrung der Orientierung erfolgen muss (z.B. $A \to A'$). Um dies zu erreichen müssen wir einen trick benutzen. Wir müssen den Schlauch durchdringen und von " innen " verkleben. Die entstehende Fläche ist geschlossen aber nicht orientierbar. Sie ist auch einseitig. Das 3D-Modell besitzt allerdings eine Selbstdurchdringung. Man kann allerdings allgemein zeigen, dass nichtorientierbare geschlossene Flächen im 3-dimensionalen Raum nicht ohne Selbstdurchdringungen darstellbar sind.

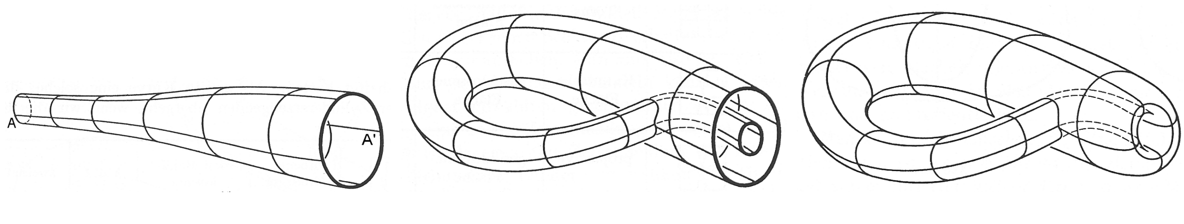

Abbildung 6.16: Erzeugung eines 3D-Modells der Klein'schen Fläche

Abbildung 6.15 ist ein topologisches Modell der projektiven Ebene. Man könnte in diesem Fall als Modell auch eine Kreisscheibe verwenden bei der diametrale Punkte identifiziert werden. Auch für diese topologische Fläche können wir ein 3D-Modell erzeugen. Wir bezeichnen dazu die Ecken des Rechteckes mit A, B, C, D und verformen das Rechteck so dass es Kugelform bekommt mit einem viereckigen Loch. in einem Weiteren Schritt verkleben wir die vier Seiten

[2]Die Bilder entstammen dem Buch: Hilbert, Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer Verlag, 2. Aufl. 1996

des verbleibenden Rechtecks, so dass die Seiten alle auf eine Gerade zu liegen kommen mit der richtigen Orientierung. Dazu muss man die Punkte B und D nach unten ziehen und A und C nach oben. Die entstehende Fläche Φ kann durch eine Fläche mit der Darstellung

$$(ax^2 + by^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0, \qquad a, b \quad \text{Formparameter}$$

modelliert werden. Abbildung 6.18 zeigt links einen Plot der impliziten Flächengleichung und rechts einen sogenannten Konturplot in dem horizontale Schnittkurven der Fläche dargestellt werden. Man sieht deutlich, dass das Modell ebenfalls eine Selbstdurchdringung aufweist.

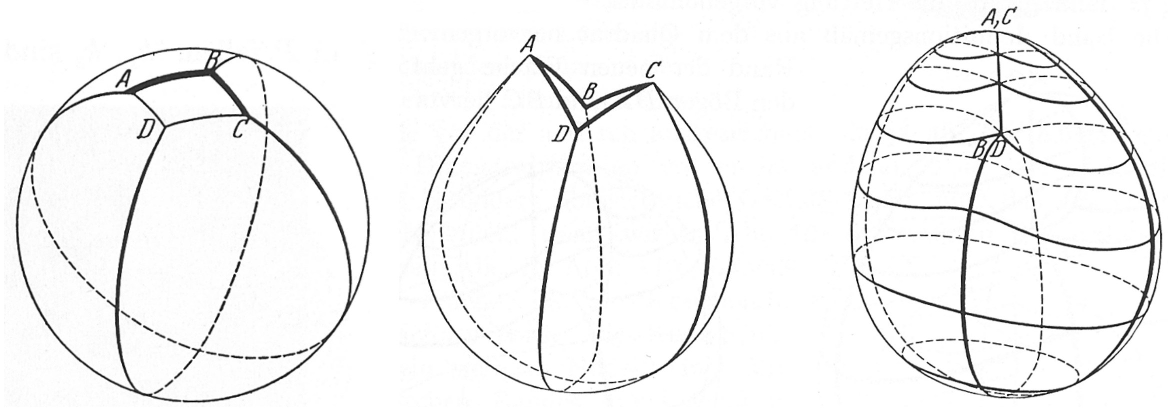

Abbildung 6.17: Erzeugung eines 3D-Modells der projektiven Ebene

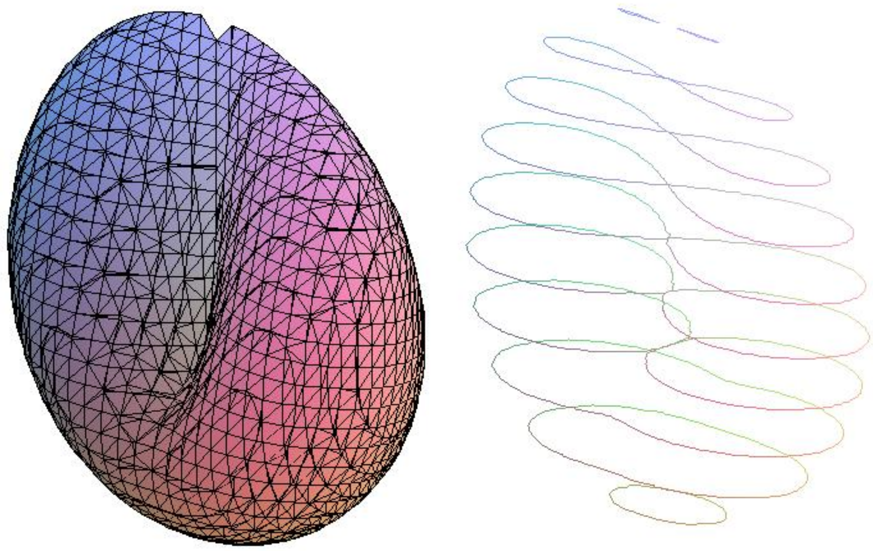

Abbildung 6.18: Analytisches 3D-Modell der Kreuzhaube

Scneidet man die Fläche Φ mit einer Ebene normal zur Durchdringungsgeraden ab, so erhält man eine berandete Fläche die *Kreuzhaube (engl. crosscap)* heißt und ein Modell für das Möbiusband darstellt (warum?).

Man muss sich bei den ebenen Modellen von topologischen Flächen nicht auf ein Rechteck beschränken. Durch $4p$- Polygone lassen sich Tori mit p Löchern herstellen. Solche Tori werden manchmal auch *Brezel* genannt. Al Beispiel betrachten wir dazu das Polygon für $p = 2$ nämlich das 8-Eck in Abb.6.19. Mit den angegebenen Identifizierungen läßt sich der $2-$Torus erzeugen.

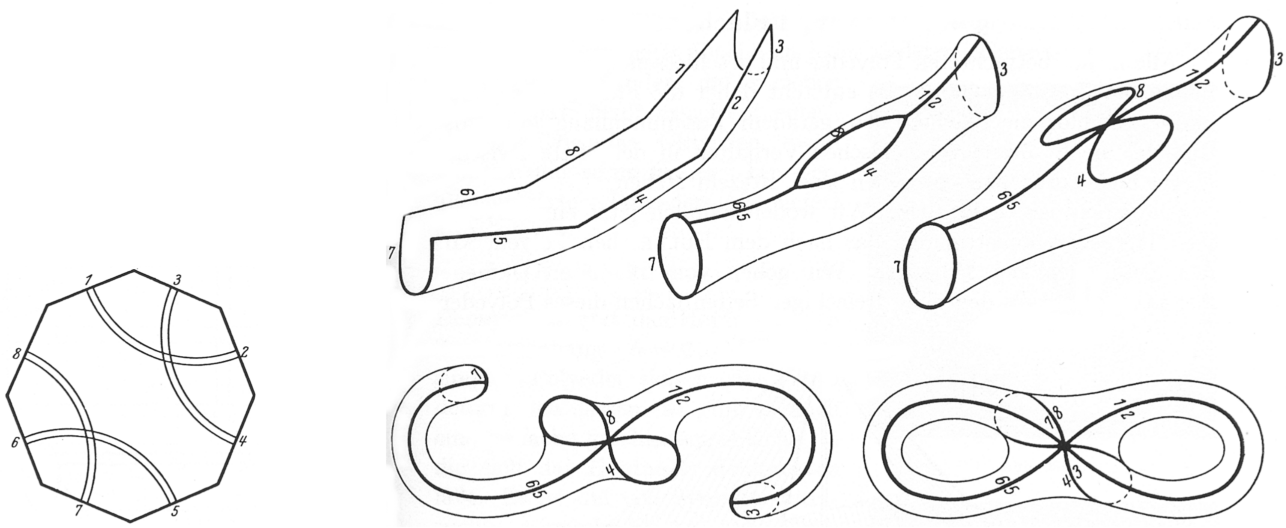

Abbildung 6.19: 2-Torus (Bilder aus Hilbert, Cohn-Vossen)

Ein weiterer wichtiger topolgische Begriffe ist der des Zusammenhangs:

Eine Fläche heißt h-fach zusammenhängend, wenn sich auf ihr h-1 Kurven bestimmen lassen, die die Fläche nicht in zwei Teile zerstückeln. Dabei muss die erste Kurve geschlossen sein, während jede weitere Kurve zwei Punkte der vorhergehenden verbindet.

Betrachten wir dazu eine Kugel in Abbildung 6.20: Eine einzige Kurve zerschneidet die Kugel in zwei Flächen, daher ist der Zusammenhang $h = 1$. Beim Torus können wir zwei Schnitte anbringen ohne die Fläche zu zerstückeln, denn wir brauchen dazu nur vom 3D-Modell auszugehen und den flachen Torus erzeugen. Durch die beiden Schnitte, eimal länges eines Breitenkreises und einmal längs eines Meridians kommen wir zum flachen Torus. Jeder weitere Schnitt zerlegt den flachen Torus in zwei Flächen.

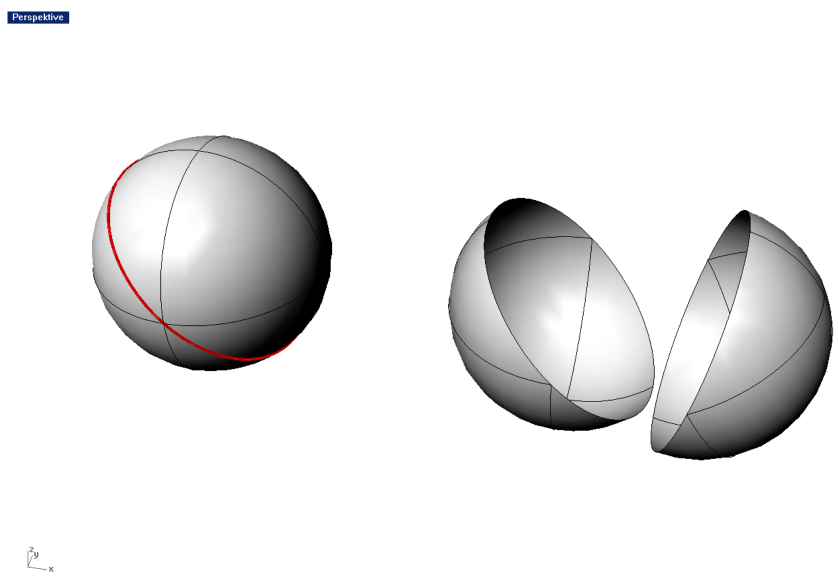

Abbildung 6.20: Zusammenhang Kugel

Mit derselben Überlegung ergibt sich der Zusammenhanng des Möbiusbandes $h = 2$; der Zusammenhang der Kleinschen Fläche ist $h = 3$ und für die projektive Ebene erhält man $h = 2$.

Den Zusammenhang $h = 2$ für die projektive Ebene kann man folgendermaßen einsehen: Wir zeigen, dass die projektive Ebene mit zwei Schnitten zerfällt. Wir gehen aus vom flachen Modell der projektiven Ebene und zeichnen eine geschlossene Kurve $c = AB$ ein (Abb.6.21,links). Ganz offensichtlich zerfällt die Fläche nicht in zwei Teile, die die beiden Gebiete 1 un d 2 hängen ja über die identifizierten Ränder zusammen. Eine zweite Schnittkurve zerteilt aber in zwei Gebiete. 1 und 3 bzw. 2 und 4 sind ja durch die Identifikation der Ränder als zwei Gebiete aufzufassen. Die Fläche zerfällt daher in zwei Teile.
Welche Fläche erhält man nach dem ersten Schnitt? (Möbiusband).

Es ist leicht einzusehen, dass man für ein Brezel mit p Löchern die Zusammenhangszahl $h = 2p + 1$ erhält.

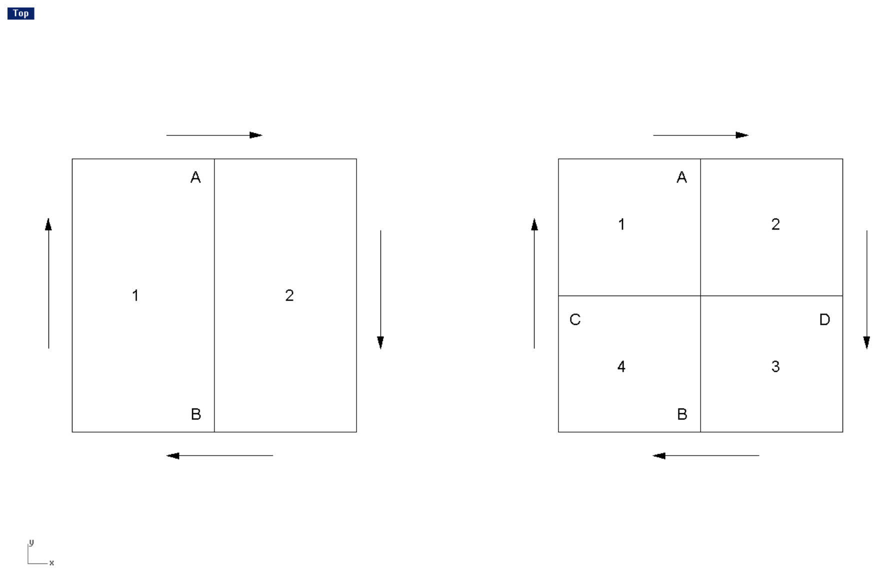

Abbildung 6.21: Zusammenhang der projektiven Ebene

Mit den Begriffen geschlossen bzw. offen (Flächen mit Randkurven), orientierbar und nicht orientierbar, sowie der Zusammenhangszahl können die Flächen in Klassen eingeteilt werden, in Klassen von Flächen die durch eine topologische Transformation ineinander übergeführt werden können.
Damit zwei Flächen topologisch äquivalent sind müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. *Beide Flächen müssen entweder geschlossen sein oder die gleiche Anzahl von Randkurven aufweisen.*

2. *Beide Flächen müssen entweder orientierbar oder nicht orientierbar sein.*

3. *Beide Flächen müssen dieselbe Zusammenhangszahl besitzen.*

6.2 Zusammenziehbare Zellen, Zerlegung in Zellen und die Eulersche Charakteristik

Wir wenden uns nun weiteren topologischen Eigenschaften zu und benutzen hierfür die ersten drei Kapitel des Buches Topologikon von Jean-Pierre Petit (Physik Verlag, vergriffen, Nachdruck im Vieweg Verlag).

Abbildung 6.22:

Abbildung 6.23:

Abbildung 6.24:

Abbildung 6.25:

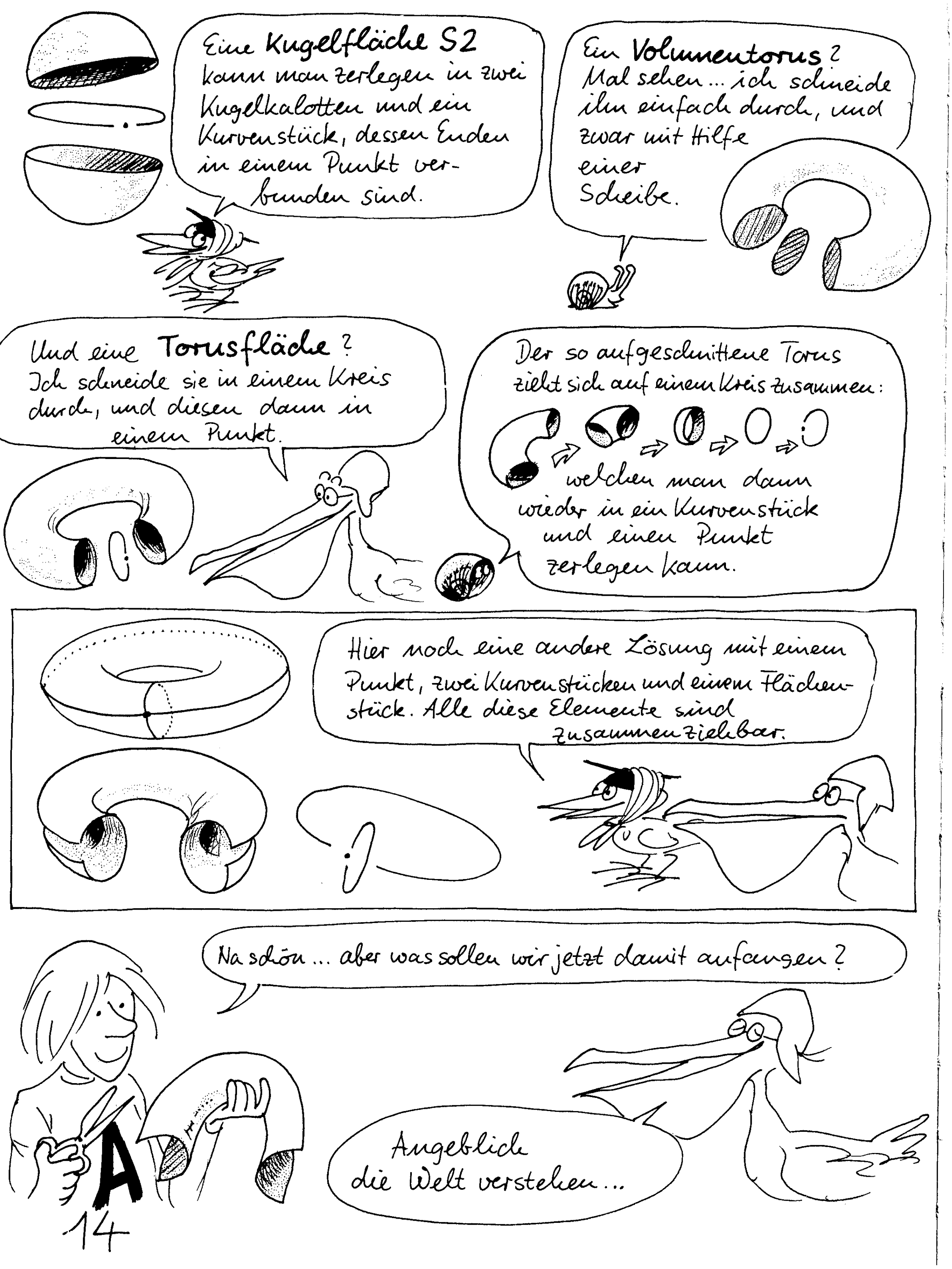

Abbildung 6.26:

Abbildung 6.27:

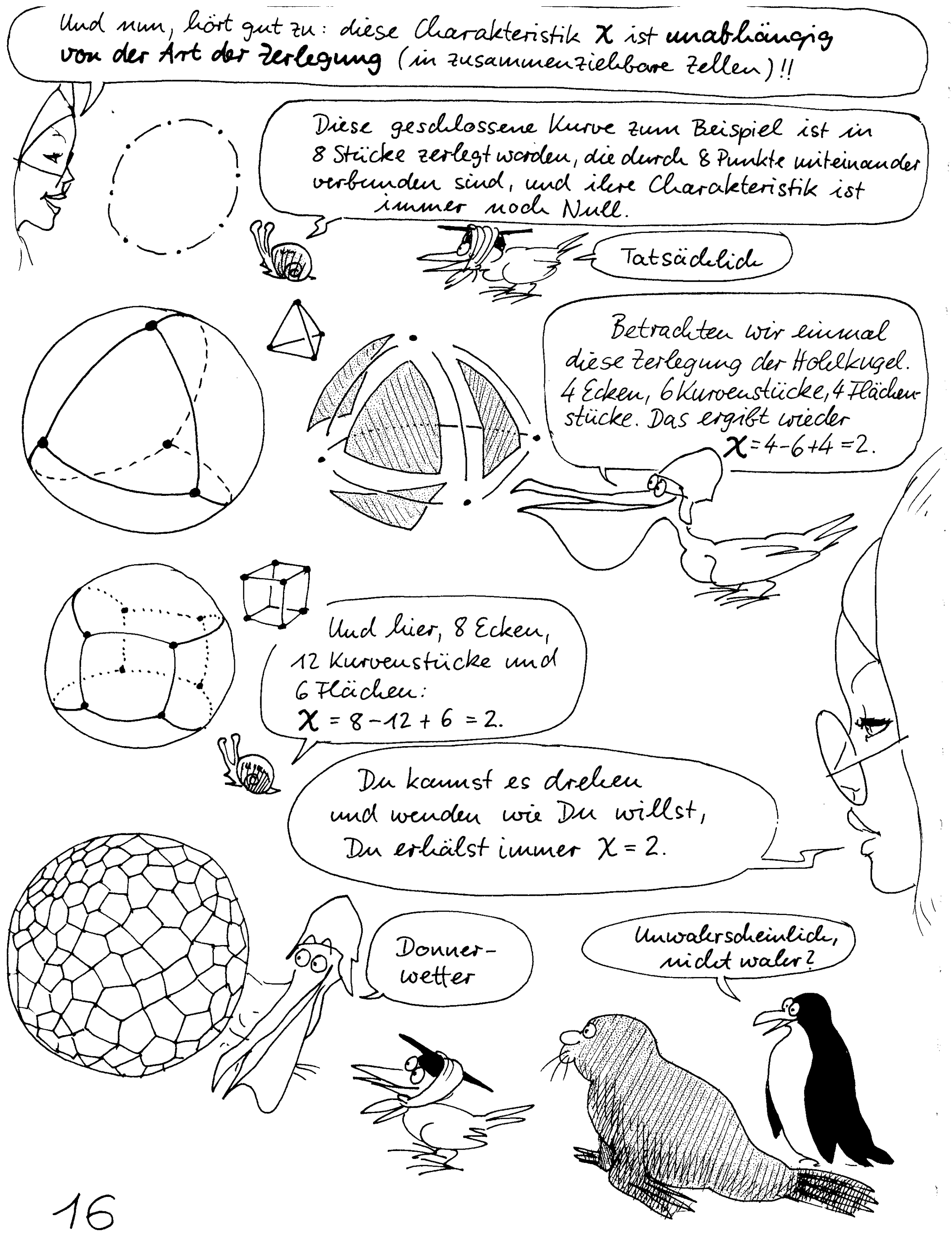

Abbildung 6.28:

Es gibt nun eine einfache Beziehung zwischen der Zusammenhangszahl und der Eulerschen Charakteristik:

$$E - K + F = \chi = 3 - h \tag{6.1}$$

Zum Abschluss dieses kurzen Einstiegs sollen ein paar Konzepte gegenübergestellt werden, die sich mit unterschiedlichen Eigenschaften von räumlichen Objekten befassen. Es sei angemerkt, dass man sich keineswegs auf dreidimensionale Objekte beschränken muss. Wir werden dies aber tun um die Sache zu vereinfachen. Wir werden diese Konzepte in Gegensatzpaaren behandeln, um sie so noch deutlicher zu machen.

6.3 Topologie – Geometrie

Wie oben bereits angedeutet beschäftigt sich die Topologie mit allen Eigenschaften, die bei Deformationen erhalten bleiben. Zwei Objekte werden daher topologisch äquivalent genannt wenn sie durch eine Deformation, aber ohne Reißen oder Kleben ineinander übergeführt werden können. Die (euklidische) Geometrie beschäftigt sich mit allen Eigenschaften eines Objektes, die bei (euklidischen) Transformationen (als z.B. Schiebungen, Drehungen, Schraubungen) erhalten bleiben. Diese Eigenschaften haben uns fast die ganze Vorlesung beschäftigt: Länge, Flächeninhalt, Volumen, Winkel, Krümmung, Gerade, Ebene, usw. Betrachten wir die vier Objekte in Abb.6.29: Die Kugel und der Torus mit zwei Löchern sind topologisch nicht äquivalent, denn durch keine Deformation kann man in die Kugel ein Loch hineinbringen. Die beiden Flächen unten sind jeweils aus Kugel oder Torus durch Deformation entstanden. Die linke Fläche ist daher topologisch äquivalent der Kugel, während die rechte dem Torus mit zwei Löchern topologisch äquivalent ist. Die Anzahl der Löcher einer Fläche ist offensichtlich eine topologische Eigenschaft. In den Abbildungen 6.30 sind acht Flächen; alle acht Flächen sind geschlossen und orientierbar. Welche sind topologisch äquivalent?

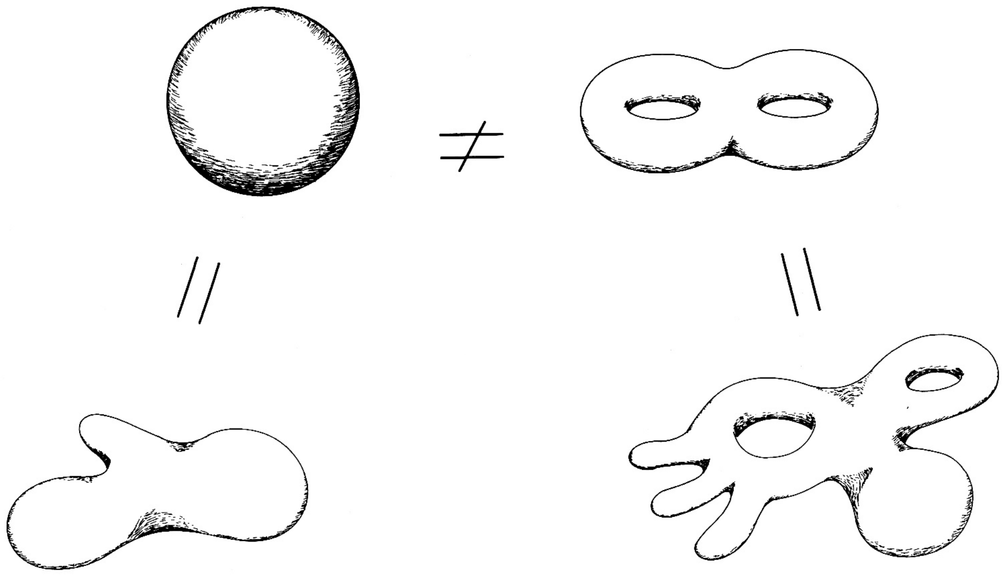

Abbildung 6.29: Topologisch unterschiedliche Flächen

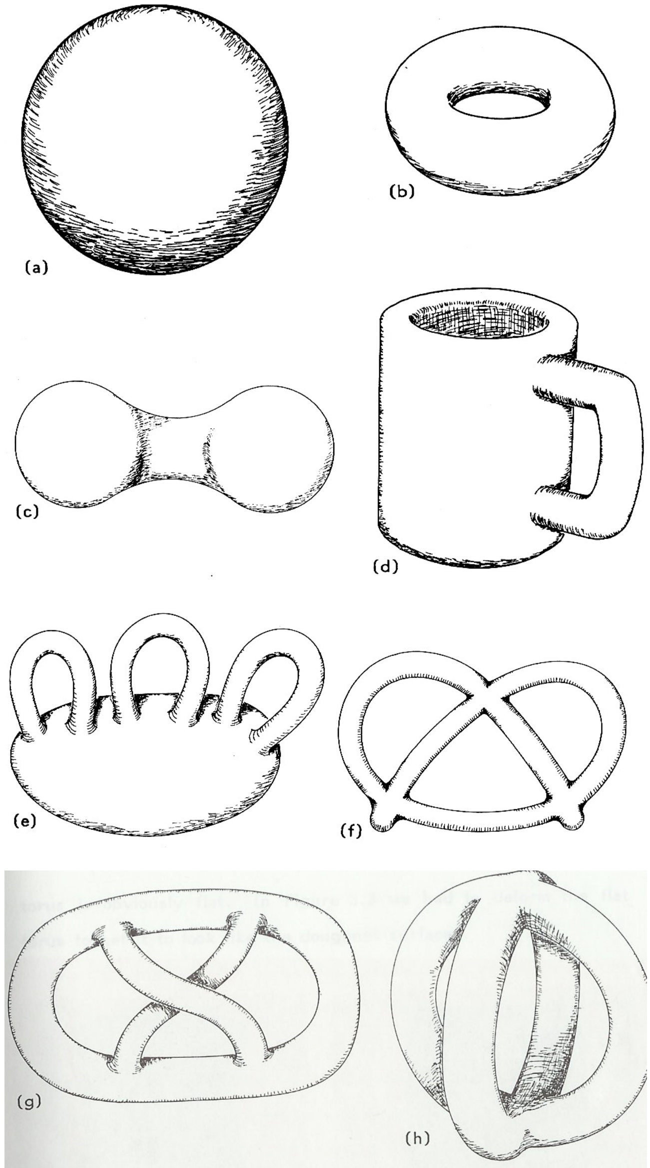

Abbildung 6.30: Topologisch unterschiedliche Flächen

6.4 Innere und äußere Eigenschaften

Wir betrachten dazu einen geschlossenen Streifen Papier, scheiden ihn durch, drehen ein Ende um 360 Grad und kleben ihn wieder zusammen. Ausgangsfläche und neue Fläche sind topologisch sicher nicht äquivalent (schneiden!). Die äußere Topologie hat sich also geändert. Wenn wir jedoch an ein zweidimensionales Lebewesen denken, das auf dem Streifen lebt, so hätte dieses Lebewesen die Prozedur so erlebt, dass seine Welt misteriöserweise aufgeschnitten wurde und dann wieder restauriert wurde. Das zweidimensionale Lebewesen hätte keine Chance die Verdrehung seiner Welt zu erkennen oder zu erfahren. Die innere Topologie (also die Topologie die ein Lebewesen, das in dieser Welt des Streifens lebt erfahren kann) hat sich nicht geändert. Allgemein werden wir sagen, dass zwei Objekte dieselbe innere Topologie haben wenn ein Lebewesen, das auf ihnen lebt sie topologisch nicht unterscheiden kann. Sie werden dieselbe äußere Topologie haben, wenn sie durch eine Deformation im Umgebungsraum ineinander übergeführt werden können. In Abbildung 6.31 sind sechs Flächen abgebildet. Welche haben dieselbe äußere Topologie, d.h. können durch Deformationen im dreidimensionalen Umgebungsraum ineinader übergeführt werden?

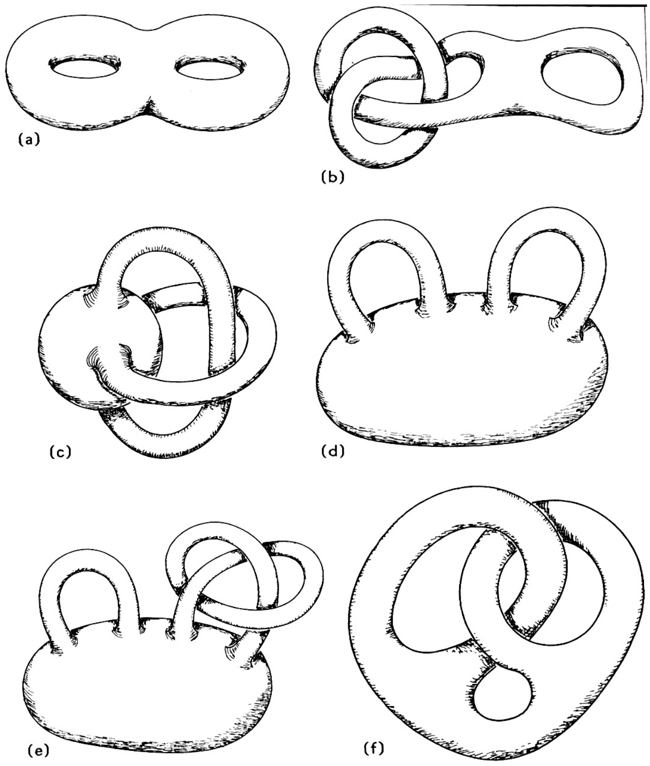

Abbildung 6.31: Äußere Topologie

Innere und äußere Eigenschaften gibt es auch bei der Geometrie. Betrachten wir dazu ein Blatt Papier. Wir biegen es zu einem Zylinder zusammen. Vom Standpunkt der dreidimensionalen Geometrie aus handelt es sich um zwei verschiedene Objekte: einmal um einen Teil einer Ebene und das zweite Mal um eine Zylinderfläche. Wenn wir jedoch vom Standpunkt eines auf dem Blatt lebenden Wesens ausgehen, so hat sich durch den Prozess des Aufrollens seine Vorstellung von der Geometrie nicht geändert. Jede Länge einer Strecke auf dem Blatt Papier ist gleich geblieben, jedes Winkelmaß, jedes Flächenmaß. Daraus folgt: der Zylinder und die Ebene haben dieselbe innere Geometrie. Abbildung 6.16 zeigt drei Flächen mit einer unterschiedlichen inneren Geometrie. Die Kugel hat eine sogenannte elliptische Geometrie, die Ebene ist euklidisch und die Sattelfläche ist hyperbolisch. Ein Lebewesen auf diesen Flächen könnte durch Ausmessen eines Dreiecks auf den Fläche feststellen auf welchem Flächentyp es sich befindet. Auf der Kugel ist die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck nämlich größer als 180° in der euklidischen Ebene ist die Winkelsumme gleich 180° und auf der Sattelfläche ist sie kleiner als 180°.
Zwei Flächen haben dieselbe äußere Geometrie wenn sie sich durch eine Kongruenztransformation ineinander überführen lassen.

6.5 Lokal und global

Wenn ein Lebewesen die Winkelsumme in einem Dreieck bestimmte, dann könnte es nur eine lokale Aussage machen, d.h. nur lokal die Geometrie seines Universums bestimmen. Stellen wir uns vor wir wollten das für ein Lebewesen auf dem Torus tun. Wenn wir es im Außenbereich machen würden wir eine elliptische Geometrie bekommen und im Innenbereich eine hyperbolische. Man darf also aus der Messung an einer Stelle nicht auf das ganze Universum schließen.

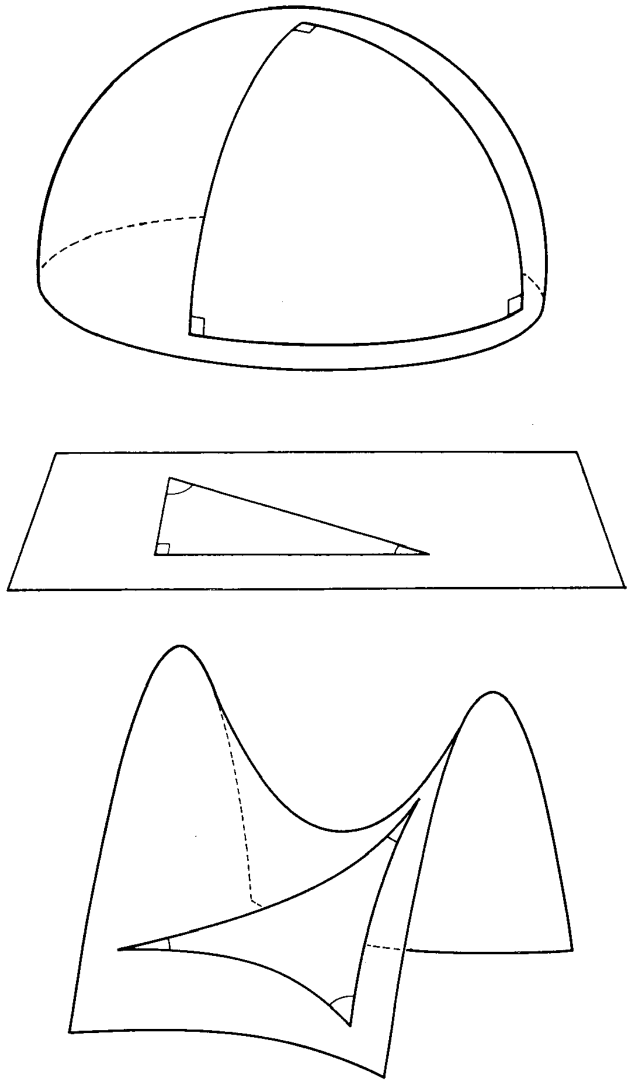

Abbildung 6.32: Innere Geometrie

Alle Eigenschaften des vorigen Kapitels waren lokale Eigenschaften: Krümmung einer Kurve, Geschwindigkeit, usw.