4. Was ist ein begleitendes Dreibein einer Raumkurve?

5. Wie ist der Krümmungskreis in einem Punkt einer Raumkurve definiert? Wie hängen Krümmungsradius und Krümmung zusammen?

6. Welche mathematischen Darstellungformen gibt es für Flächen? Welche Darstellungsform ist für die Computergraphik am geeignetsten?

7. Was versteht man unter einer Flächenkurve? Wie kommt man von der Parameterdarstellung einer Fläche zur Parameterdarstellung einer Kurve auf dieser Fläche?

8. Wann liegt ein singulärer Punkt auf einer Fläche vor? (Beispiel?)

6 Topologische Eigenschaften von Raumobjekten

Die Freiformkurven und Freiformflächen des letzten Abschnittes haben die wesentliche Eigenschaft, dass sie im Designprozess deformiert werden können. Dabei gehen viele Eigenschaften, die wir bisher behandelt haben, wie Längenmaße, Winkelmaße, Flächenmaße verloren. Nun können wir uns fragen: gibt es vielleicht dennoch Eigenschaften dieser Objekte, die sich mathematisch präzise fassen lassen und nicht verändert werden? Mit mathematischen Eigenschaften von deformierbaren Objekten beschäftigt sich die *Topologie*. Denken wir und das Objekt (z.B. eine Kurve, eine Fläche ein Solid) aus beliebig deformierbarem, aber völlig unzerreißbarem und unverklebbarem Material hergestellt, dann fragen wir nach Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man diese Objekte beliebig deformiert. Beispielsweise werden solche Eigenschaften gleichzeitig auf eine Kugel, ein Ellipsoid, einen Quader oder ein Tetraeder zutreffen, nicht aber auf einen Torus.
Wir werden uns in diesem Abschnitt aber nicht nur mit topologischen Konzepten auseinandersetzen, sonder auch noch einige andere wichtige Konzepte zur mathematischen Beschreibung von Objekten kennenlernen. Als Einstieg zitieren wir hier die Geschichte von Flatland nach E.A. Abbott (Flatland, A Romance of Many Dimensions, Dover, New York, 1952) entnommen aus dem Buch The Shape of Space"von J. Weeks. (Text im Verzeichnis flatland)
Bevor wir in die Topologie einsteigen sollen ein paar Konzepte gegenübergestellt werden, die sich mit unterschiedlichen Eigenschaften von räumlichen Objekten befassen. Es sei angemerk, dass man sich keineswegs auf dreidimensionale Objekte beschränken muss. Wir werden dies aber tun um die Sache nicht zu sehr zu verkomplizieren. Wir werden diese Konzepte in Gegensatzpaaren behandeln, um sie so noch deutlicher zu machen.

6.1 Topologie – Geometrie

Wie oben bereits angedeutet beschäftigt sich die Topologie mit allen Eigenschaften, die bei Deformationen erhalten bleiben. Die (euklidische) Geometrie beschäftigt sich mit allen Eigenschaften eines Objektes, die bei (euklidischen) Transformationen (als z.B. Schiebungen, Drehungen, Schraubungen) erhalten bleiben. Diese Eigenschaften haben uns fast die ganze Vorlesung beschäftigt: Länge, Flächeninhalt, Volumen, Winkel, Krümmung, Gerade, Ebene, usw. Betrachten wir dau die vier Objekte in Abb.39: Die Kugel und der Torus mit zwei Löchern habe unterschiedliche topologische Eigenschaften, denn durch keine Deformation kann man in die Kugel ein Loch hineinbringen. Die beiden Flächen unten sind jeweil aus Kugel oder Torus durch Deformation entstanden. Die linke Fläche ist daher topologisch äquivalent der Kugel während die rechte dem Torus topologisch äquivalent ist. Die Anzahl der Löcher einer Fläche ist offensichtlich eine topologische Eigenschaft. In den Abbildungen 40 und 41 sind acht Flächen. Welche sind topologisch äquivalent?

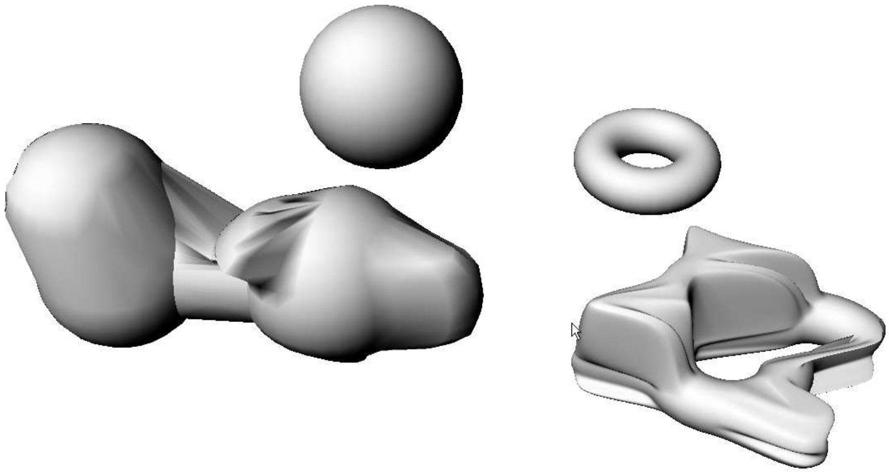

Abbildung 39:

6.2 Innere und äußere Eigenschaften

Wir betrachten dazu einen geschlossenen Streifen Papier, scheiden ihn durch, drehen ein Ende um 360 Grad ud kleben ihn wieder zusammen. Ausgangsfläche und neue fläche sind topologisch sicher nicht äquivalent (schneiden!). Die äußere Topologie hat sich also geändert. Wenn wir jedoch an ein zweidimensionales Lebewesen denken, das auf dem Streifen lebt, so hätte dieses Lebewesen die prozedur so erlebt, dass seine Welt misteriöserweise aufgeschnitten wurde und dann wieder restauriert wurde. Das zweidimensionale Lebewesen hätte keine Chance die Verdrehung seiner Welt zu erkennen oder zu erfahren. Die innere Topologie (also die Topologie die ein Lebewesen, das in dieser Welt des Streifens lebt erfahren kann) hat sich nicht geändert.
Allgemein werden wir sage, dass zwei Objekte dieselbe innere Topologie haben wenn ein Lebewesen, das auf ihnen lebt sie topologisch nicht unterscheiden kann. Sie werden dieselbe äußere topologie haben, wenn sie durch eine deformation im Umgebungsraum ineinander übergeführt werden können. In Abbildung 42 sind sechs Flächen abgebildet. Welche haben dieselbe äußere Topologie, d.h. können durch Deformationen im dreidimensionalen Umgebungsraum ineinader übergeführt werden? Innere und äußere Eigenschaften gibt es auch bei der Geometrie. Betrachten wir dazu ein Blatt Papier. Wir biegen es zu einem Zylinder zusammen. Vom Standpunkt der dreidimension balen geometrie aus handelt es sich um zwei verschiedene Objekte: einmal um eine Teil einer Ebene und das zweite Mal um eine Zylinderfläche. Wenn wir jedoch vom Standpunkt eines auf dem Blatt lebenden Wesens ausgehen, so hat sich durch den Prozess des Aufrollens seine Vorstellung von der Geometrie nicht geändert. Jede Länge einer Strecke auf dem Blatt Papier ist gleich geblieben, jedes Winkelmaß, jedes Flächenmaß. Daraus folgt: der Zylinder und die Ebene haben dieselbe innere Geometrie. Abbildung 43 zeigt drei Flächen mit einer unterschiedlichen inneren Geometrie. Die Kugel hat eine sogenannte elliptische Geometrie, die Ebene ist euklidisch und die Sattelfläche ist hyperbolisch. Ein Lebewesen auf diesen Flächen könnte durch Ausmessen eines Dreiecks auf den Fläche feststellen auf welchem flächentyp es sich befindet. Auf der Kuggel ist die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck nämlich größer

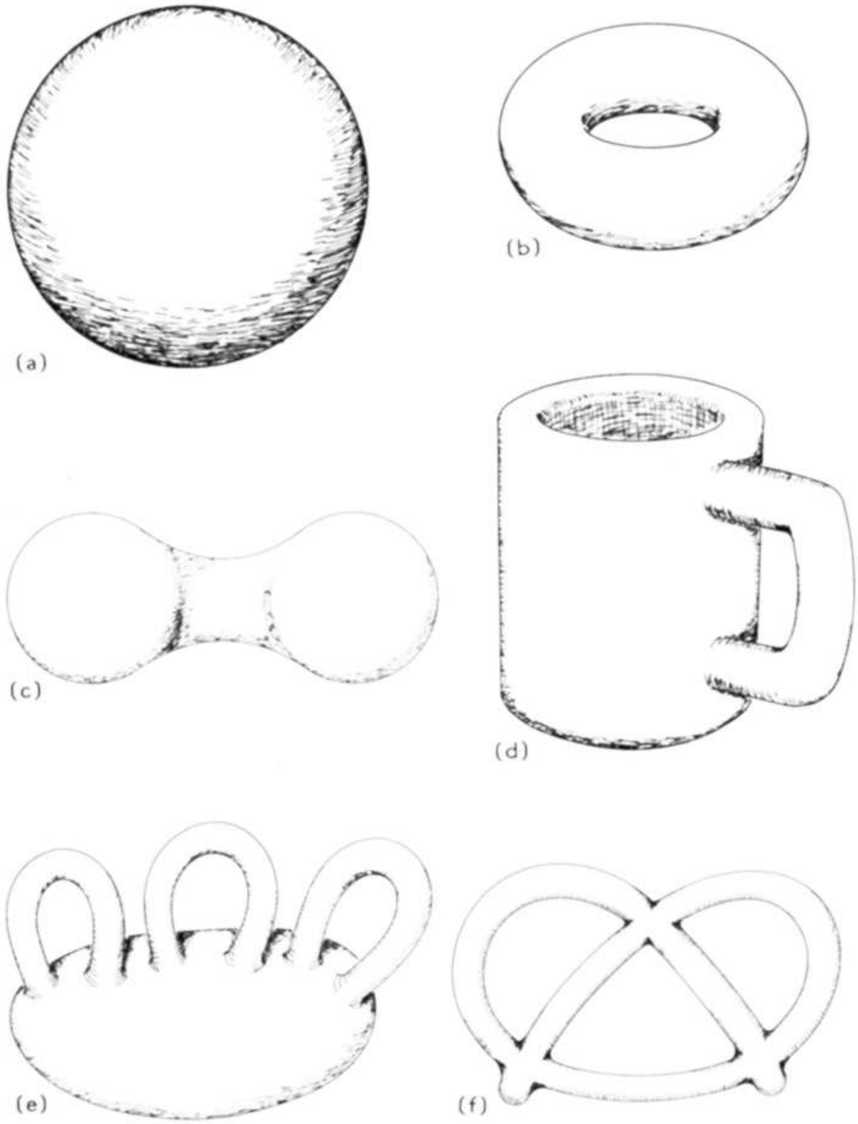

Abbildung 40:

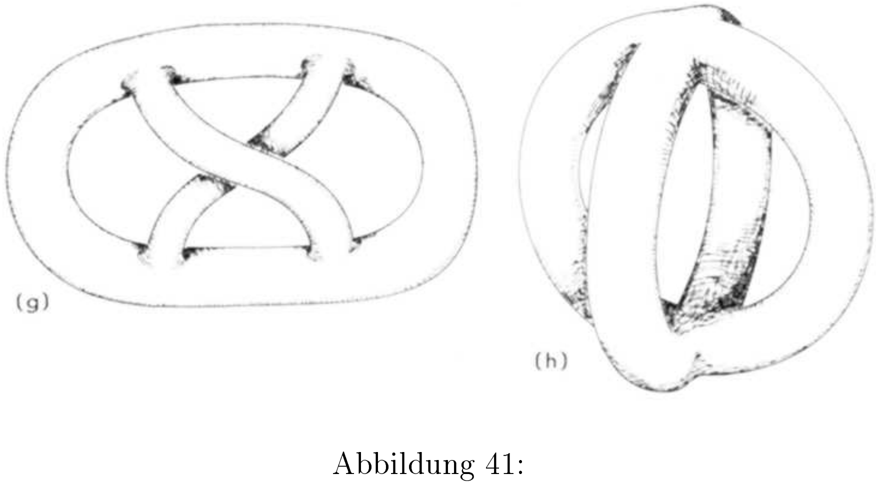

Abbildung 41:

Abbildung 42: Scan004.tif

Abbildung 43: Scan005.tif

als 180° in der euklidischen Ebene ist die Winkelsumme gleich 180° und auf der Sattelfläche ist sie kleiner als 180°.
Zwei Flächen haben dieselbe äußere Geometrie wenn sie sich durch eine Kongruenztransformation ineinander überführen Lassen.

6.3 Lokal und global

Wenn ein Lebewesen die Winkelsumme in einem Dreieck bestimmte, dann könne es nur eine lokale Aussage machen, d.h. nur lokal die Geometrie seines Universums bestimmen. Stellen wir uns vor wir wollten das für ein Lebewesen auf dem Torus tun. Wenn wir es im Außenbereich machen würden wir eine elliptische Geometrie bekommen und im Innenbereich eine hyperbolische. Man darf also aus der Messung an einer Stelle nicht auf das ganze Universum schließen.
Alle Eigenschaften des vorigen Kapitels waren lokale Eigenschaften: Krümmung einer Kurve, Geschwindigkeit, usw.

6.4 Zusammenziebare Zellen, Zerlegung in Zellen und die Eulersche Charakteristik

Wir wenden uns nun den angekündigten topologischen Eigenschaften zu und benutzen hierfür die ersten drei Kapitel des Buches Topologikon von Jean-Pierre Petit (PhysikVerlag, vergriffen, Nachdruck im Vieweg Verlag). (im Verzeichnis topologikon)