1 Koordinaten, Vektoren und Matrizen

Der erste Abschnitt ist der **Matrizenrechnung**, der **Vektorrechnung** und dem Arbeiten mit **Determinanten** gewidmet. Daneben wird die Theorie der **linearen Gleichungssysteme** zusammenfassend dargestellt. Dieser Abschnitt stellt damit alle jene Begriffe und Methoden bereit, die für eine mathematische Beschreibung des 3-dim Raumes bzw. den geometrischen Grundlagen des CAD erforderlich sind. Bei diesem Aufbau wird die Vektorrechnung in die Matrizenrechnung eingebaut. Wesentliche Strukturen werden zunächst an Beispielen herausgearbeitet.

1.1 Matrizen

Definition 1.1 *Eine Matrix A der Ordnung $(m \times n)$ (kurz: eine $(m \times n)$ - Matrix) ist ein rechteckiges Schema aus mn Elementen der Form*

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die horizontalen Reihen in A heißen Zeilen oder Zeilenvektoren, die vertikalen Reihen in A Spalten oder Spaltenvektoren.

Die Elemente einer Matrix können reelle Zahlen, aber auch z.B. Funktionen eines oder mehrerer Parameter sein.

Definition 1.2 *Zwei Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ heißen gleich, wenn sie die gleiche Ordnung besitzen und wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, ..., m$ und für alle $j = 1, ..., n$ gilt.*

<u>Beispiel:</u> Von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} t & 2t^2 \\ 1 & 0 \\ t^3 & 1-t \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

sind nur A undD gleich.

Definition 1.3 *Es seien $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ zwei $(m \times n)$ - Matrizen. Die Summe $A + B =: C = (c_{ij})$ von A und B ist gegeben durch $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle $i = 1, ..., m$ und für alle $j = 1, ..., n$.*

<u>Beispiele:</u>

1. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} t^2 & 5 \\ 3t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ t & -t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2+1 & -1 \\ 4t & -t \end{pmatrix}$

Für die *Matrizenaddition* gelten folgende *Rechenregeln:*

$$A + B = B + A \qquad \ldots\text{Kommutativgesetz} \tag{1}$$
$$A + (B+C) = (A+B) + C \qquad \ldots\text{Assoziativgesetz} \tag{2}$$
$$A + 0 = A \tag{3}$$

wobei 0 jene Matrix ist, deren Elemente alle Null sind (Nullmatrix).

Definition 1.4 *Es sei* $A = (a_{ij})$ *eine* $(m \times n)$ *- Matrix und es sei* λ *ein Skalar. Das Skalarprodukt* $\lambda A =: C = (c_{ij})$ *von* λ *und* A *ist gegeben durch* $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ *für alle* $i = 1, ..., m$ *und für alle* $j = 1, ..., n$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 5 \\ 0 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -2 & 15 \end{pmatrix} .$$

Insbesondere erhält man für eine Matrix A und $\lambda = -1$

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \cdots & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{m1} & \cdots & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} = -A$$

Allgemein gibt man nun die

Definition 1.5 *Eine Gruppe* $(G, \circ)$ *besteht aus einer Menge* G *und einer Operation (Verknüpfung der Gruppenelemente)* $\circ$ *, die jedem geordneten Paar* (a, b) *von Elementen* $a \in G$, $b \in G$ *eindeutig ein mit* $a \circ b$ *bezeichnetes Element aus* G *zuordnet, wobei gilt*

(G I) $\quad a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$

(G II) $\quad$ *Es existiert ein* $e \in G$ *mit* $e \circ a = a$ *für alle* $a \in G$

(G III) $\quad$ *Zu jedem* $a \in G$ *existiert ein* $a' \in G$ *mit* $a' \circ a = e$.

Das Element e *heißt das neutrale Element der Gruppe* $\circ$ *, das Element* a' *heißt das inverse Element zum Element* a.

Eine Gruppe heißt kommutativ (abelsch), wenn für alle $a, b |\in G$ *gilt*

(G IV) $\quad a \circ b = b \circ a$

Bemerkung: Wichtig ist, dass man mit den Elementen von G bezüglich der Operation $\circ$ rechnen kann, ohne dass man aus G herauskommt.
Beispiele:

1. Nimmt man für G die Menge aller (m × n) - Matrizen und als Operation $\circ$ die Addition dieser Matrizen, dann bilden diese eine abelsche Gruppe.

   In der Tat entsteht bei der Addition als Verknüpfung wieder eine (m × n) - Matrix und die Axiome $(G\ I) - (G\ IV)$ sind erfüllt, wie die Gleichungen $(1.1b)$, $(1.1c-d)$ und $(1.1a)$ zeigen.

   Wenn die Rechenoperation $\circ$ speziell $+$ ist - wie in diesem Beispiel - sagt man: die Gruppe ist *additiv geschrieben*

2. Die ganzen Zahlen $Z = \{ 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \}$ bilden bezüglich der Addition $\circ = +$ eine abelsche Gruppe.

3. Die natürlichen Zahlen $N = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$ bilden bezüglich der Addition keine Gruppe, denn 0 ist keine natürliche Zahl.

4. $N \cup 0 = \{ 0, 1, 2, \ldots \}$ ist keine Gruppe bezüglich der Addition, denn z. B. zu 2 gibt es kein inverses Element. (-2) ist keine natürliche Zahl

Für die *Skalarenmultiplikation von Matrizen* gelten folgende *Rechenregeln:*

$$\begin{aligned}
\lambda A &= A\lambda && \ldots\text{Kommutativgesetz,}\\
\lambda_1(\lambda_2 A) &= (\lambda_1\lambda_2)A && \ldots\text{Assoziativgesetz,}\\
\lambda(A+B) &= \lambda A + \lambda B && \ldots\text{Distributivgesetz, } I\\
(\lambda_1+\lambda_2)A &= \lambda_1 A + \lambda_2 A && \ldots\text{Distributivgesetz } II.
\end{aligned} \tag{4}$$

Insbesondere gilt für $\lambda = 1$ und eine (m $\times$ n) - Matrix A

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = A$$

Allgemein gibt man die

Definition 1.6 *Ein reeller Vektorraum* $\mathbf{V}$ *besteht aus einer additiv geschriebenen, kommutativen Gruppe* $\mathbf{V}$*, deren Elemente Vektoren heißen, und einer Multiplikationsvorschrift, die jedem Vektor* $\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ *und jeder reellen Zahl* λ *eindeutig einen Vektor* $\lambda\mathbf{a} \in \mathbf{V}$ *zuordnet, wobei gilt*

$$\begin{aligned}
\lambda(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\mathbf{a} && \ldots\text{Assoziativgesetz}\\
\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} && \ldots\text{Distributivgesetz } I\\
(\lambda+\mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} && \ldots\text{Distributivgesetz } II\\
1\cdot\mathbf{a} &= \mathbf{a}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Bemerkungen:

1) Wir sprechen von einem reellen Vektorraum $\mathbf{V}$, weil die Zahlen $\lambda, \mu, \ldots$ in Def. 1.6 *reelle Zahlen* sind.

2) In $\mathbf{V}$ kann man die *Linearkombination* $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \lambda_n\mathbf{a}_n$ bilden, wobei die $\lambda_i \in R$ (d.h. reelle Zahlen) und die $\mathbf{a}_j \in \mathbf{V}$ sind. Sie stellt einen Vektor aus $\mathbf{V}$ dar, d.h. ein Vektorraum ist *gegenüber linearen Operationen abgeschlossen.*

Beispiele:

1. Die (m $\times$ n) - Matrizen $V = \{A, B, \ldots\}$ bilden einen reellen Vektorraum, wenn man die in Definition 1.3 eingeführte Addition von Matrizen und die in Definition 1.4 eingeführte Skalarmultiplikation als Operationen nimmt.

2. Eine (1 $\times$ n) - Matrix $\mathbf{a} := (a_{11},\ a_{12},\ \cdots,\ a_{1n})$ heißt ein **Zeilenvektor**. Nach Beispiel 1) bilden alle Zeilenvektoren einen reellen Vektorraum R^n, wenn man die Addition und Skalarenmultiplikation wie folgt definiert (Indizierung vereinfacht): Für $\mathbf{a} = (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)$, $\lambda \in R$ sei

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \cdots,\ a_n + b_n) \tag{6}$$

$$\lambda \mathbf{a} = (\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \cdots,\ \lambda a_n) \tag{7}$$

Der Vektorraum R^n heißt *arithmetischer Vektorraum der Dimension n*. Seine Vektoren werden oft mit $\vec{a},\ \vec{b},\ \cdots$ bezeichnet.

3. Eine (m $\times$ 1) - Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ heißt ein **Spaltenvektor**. Nach 1) und 2) bilden alle Spaltenvektoren einen Vektorraum R^m, genannt *arithmetischer Vektorraum der Dimension m*, wenn man als Operationen definiert:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_m + b_m \end{pmatrix}$$

$$\lambda a = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \vdots \\ \lambda a_m \end{pmatrix}$$

Wir setzen das Rechnen mit Matrizen fort:

Definition 1.7 *Es sei $A = (a_{ij})$ eine (m $\times$ n) - Matrix und es sei $B = (b_{ij})$ eine (n $\times$ p) - Matrix. Das Produkt $AB =: C = (c_{ij})$ von A und B ist eine (m $\times$ p) - Matrix, gegeben durch*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \tag{8}$$

Beispiele:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 11 & -2 \\ -3 & -1 & -5 & 1 \\ 13 & 1 & 16 & -3 \end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}.$

Für die *Matrizenmultiplikation* gelten folgende *Rechenregeln:*

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C && \ldots \text{Assoziativgesetz,} \\ A(B+C) &= AB + AC && \ldots \text{Rechts – Distributivgesetz,} \\ (A+B)C &= AC + BC && \ldots \text{Links – Distributivgesetz.} \end{aligned} \tag{9}$$

Im allgemeinen gilt jedoch $AB \neq BA$ (siehe das obige Beispiel (2) !).

Bemerkung:
Es gibt von der Nullmatrix verschiedene Matrizen, deren Produkt die Nullmatrix ist. Solche Matrizen nennt man *Nullteiler*.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Bemerkung:
Die Existenz von Nullteilern hat zur Folge, daß aus der Gleichung $AB = AC$ im allgemeinen *nicht* $B = C$ gefolgert werden kann.
Beispiel:
Gegeben seien die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .Dann ist $AB = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ und $AC = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, also wohl $AB = AC$, jedoch $B \neq C$.

Satz 1.1 *Die $(m \times n)$ - Matrizen bilden einen reellen Vektorraum bei der eingeführten Matrizenaddition und der eingeführten Skalarmultiplikation. Die Multiplikation von Matrizen ist nicht kommutativ, aber assoziativ und distributiv. Bei der Matrizenmultiplikation gibt es Nullteiler. Die Spalten- bzw. Zeilenvektoren bilden je einen arithmetischen Vektorraum.*

1.2 Transponieren von Matrizen, spezielle Matrizen

Definition 1.8 *Ist $A = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$ - Matrix, dann versteht man unter der transponierten Matrix A^T (Transponierten) die Matrix mit den Elementen*

$$A^T = (a_{ji}) \qquad \begin{matrix} (i = 1, \cdots, m) \\ (j = 1, \cdots, n) \end{matrix} \tag{10}$$

Bemerkung: Man erhält somit A^T , indem man in A die Zeilen und Spalten vertauscht.

Beispiele:

1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 \\ -3 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & -1 \end{pmatrix}$

2. $(a_1, a_2, \cdots, a_n)^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Dieses Beispiel zeigt, daß man durch Transponieren aus jedem Zeilenvektor einen Spaltenvektor machen kann und umgekehrt.

Für die *Matrizentransposition* gelten folgende *Rechenregeln:*

$$\begin{aligned} (A+B)^T &= A^T + B^T, \\ (AB)^T &= B^T A^T \\ (A^T)^T &= A. \end{aligned} \tag{11}$$

(man achte auf die Reihenfolge der Faktoren!).

Beim Rechnen mit Matrizen ist es oft von Nutzen, spezielle Eigenschaften derselben zu kennen. Wir wollen deshalb einige spezielle Matrizen erwähnen.

Definition 1.9 *Es sei* $A = (a_{ij})$ *eine* $(m \times n)$ *- Matrix.*

1. A *heißt reelle Matrix, wenn alle* a_{ij} *reell sind.*
2. A *heißt quadratische Matrix, wenn* $m = n$ *ist.*
3. A *heißt symmetrische Matrix, wenn* A *reell und quadratisch ist und überdies* $A = A^T$ *gilt.*
4. A *heißt schiefsymmetrische Matrix, wenn* A *reell und quadratisch ist und überdies* $A = -A^T$ *gilt.*
5. A *heißt obere Dreiecksmatrix, wenn* A *quadratisch ist und* $a_{ij} = 0$ *ist für alle* $i > j$.
6. A *heißt Diagonalmatrix, wenn* $a_{ij} = 0$ *ist für alle* $i \neq j$.
7. $A = I$ *heißt Einheitsmatrix, wenn* I *eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonalelemente alle* 1 *sind.*

Folgerungen:

1. Aus der Definition einer symmetrischen Matrix folgt $a_{ij} = a_{ji}$, sodaß eine Matrix dieser Art die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{12}$$

   besitzt. Sie ist *spiegelbildlich zur Hauptdiagonale.*

2. Aus der Definition einer schiefsymmetrischen Matrix folgt $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$, d. h. *alle Hauptdiagonalelemente sind 0.* Eine schiefsymmetrische Matrix hat die Gestalt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Wichtig ist der folgende

Satz 1.2 *Jede reelle quadratische Matrix* A *läßt sich als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix darstellen.*

Beweis: Wir setzen $A = R + S$ mit $R = \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $S = \frac{1}{2}(A - A^T)$. Ersichtlich ist R symmetrisch, denn $R^T = \frac{1}{2}(A^T + A) = \frac{1}{2}(A + A^T) = R$, und S schiefsymmetrisch, denn $S^T = \frac{1}{2}(A^T - A) = -\frac{1}{2}(A - A^T) = -S$.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} .$$

1.3 Determinanten

Im Folgenden wenden wir uns dem im Zusammenhang mit Matrizen wichtigen Begriff der Determiante zu. Der Begriff findet sich erstmals bei *Carl Friedrich GAUSS* (1801), verwendet wurde diese Matrizenfunktion allerdings bereits 1678 von *Gottfried Wilhelm LEIBNIZ.*

Definition 1.10

1. *Es sei* $A = (a_{11})$. *Unter der Determinante von* A *verstehen wir den Skalar*

$$|\,A\,| = \det A \;:=\; a_{11}$$

.

2. *Es sei* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. *Unter der Determinante von* A *verstehen wir den Skalar*

$$|\,A\,| = \det A \;:=\; a_{11}a_{22} \;-\; a_{12}a_{21}.$$

Aufbauend auf Definition 1.10 werden wir induktiv den Begriff der Determinante einer beliebigen (n × n) - Matrix einführen; diese Vorgangsweise besitzt den Vorteil, überdies ein Verfahren zur Berechnung der Determinante zu liefern.
Wir nehmen also zunächst an, die Determinante einer beliebigen ((n - 1) × (n - 1)) - Matrix sei bereits definiert. Vorerst eine wichtige *Begriffsbildung.*

Definition 1.11 *Es sei* A *eine (m × n) - Matrix und es sei* $r \leq m$, $s \leq n$. *Eine (r × s) - Untermatrix von* A *ist eine (r × s) - Matrix, welche aus* A *durch Streichung von m - r Zeilen und n - s Spalten hervorgeht.*

Beispiel: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ist jene 2×2 Untermatrix von $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, welche durch Streichung der ersten Zeile und der zweiten Spalte entsteht.

Definition 1.12 *Es sei* A *eine (n × n) - Matrix und es sei* A_{ij} *jene ((n - 1) × (n - 1)) - Untermatrix von* A *, welche durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von* A *entsteht. Der (i,j) - Minor von* A *ist dann gerade* $\det A_{ij}$.

Beispiel: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$ ist der (1,2) - Minor von $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Definition 1.13 *Es sei* $A = (a_{ij})$ *eine (n × n) - Matrix. Der Kofaktor (die Adjunkte) des Elements* a_{ij} *ist das Produkt aus* $(-1)^{i+j}$ *und dem* (i,j) *- Minor von* A.

Beispiel: $(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix} = 3$ ist der Kofaktor von $a_{12} = 2$ in $\begin{pmatrix}0 & 2 & 7\\ 1 & 3 & 2\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$.

Um nun zur *Determinante* einer $(n \times n)$ - Matrix zu gelangen, geht man folgendermaßen vor:

(a) Wahl einer beliebigen Zeile oder Spalte.

(b) Bestimmung des Kofaktors zu jedem Element in der gewählten Zeile oder Spalte (die Bildung der Determinante von $((n - 1) \times (n - 1))$ - Matrizen ist ja als bereits bekannt angenommen worden).

(c) Multiplikation aller Elemente der gewählten Zeile oder Spalte mit ihrem Kofaktor.

(d) Summation aller so erhaltenen Produkte.

Beispiel: Die Entwicklung der Determinante von

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & 2\\ -1 & 4 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

nach der zweiten Spalte liefert
$\det A =$

$$= 0\cdot(-1)^{1+2} \mid A_{12} \mid +4(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^{3+2} \mid A_{32} \mid +1(-1)^{4+2}\begin{vmatrix}1 & 5 & 2\\ -1 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 1\end{vmatrix} =$$

$= 4\left\{1(-1)^{1+1}\cdot 11 + 5(-1)^{1+2}\cdot 11 + 2(-1)^{1+3}\cdot 11\right\} + 1\left\{2(-1)^{1+3}(-7) + 0(-1)^{2+3}(-11) + 1(-1)^{3+3}\cdot 6\right\} = 4(-22) + (-8) = -96.$

Wichtige Determinanteneigenschaften:

Es sei A eine $(n \times n)$ - Matrix.

(a) Besitzt eine Zeile (Spalte) von A lauter Nullen, dann ist $\det A = 0$.

(b) Werden zwei Zeilen (Spalten) von A vertauscht, dann ändert $\det A$ das Vorzeichen.

(c) Sind zwei Zeilen (Spalten) von A gleich, dann ist $\det A = 0$.

(d) Erhält man B aus A durch Multiplikation einer Zeile (Spalte) von A mit einem Skalar λ, dann ist $\det B = \lambda \det A$.

(e) Für jeden Skalar λ gilt $\det(\lambda A) = \lambda^n\, Det\ A$.

(f) Erhält man B aus A, indem man zu einer Zeile (Spalte) von A das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte) von A addiert, dann ist $\det B = \det A$.

(g) $\det A^T = \det A$.

(h) Ist B eine $(n \times n)$ - Matrix, dann gilt $\det(AB) = \det A \det B$.

(i) Die Determinante von Diagonalmatrizen und Dreiecksmatrizen ist stets das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Diese Eigenschaften ermöglichen in vielen Fällen eine rasche Berechnung von Determinanten.
Beispiele:

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ -10 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -6 & -3 \\ 6 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

$$(2)\quad \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & -2 & 3 & 1 \\ 30 & 7 & 0 & 16 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -3 & 3 & 1 \\ 30 & 0 & 16 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & -40 & -14 \end{vmatrix} = 3\,(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ -40 & -14 \end{vmatrix} = 186.$$

Auf eine Herleitung aller Eigenschaften $(a) - (i)$ einer Determinante können wir hier nicht eingehen.

1.4 Koordinaten

Wir bezeichnen mit E_2 die *euklidische Ebene* (Anschauungsebene) und mit E_3 den *euklidischen Raum* (Anschauungsraum). Unter einem *Parallelkoordinatensystem in E_2* versteht man 2 orientierte Geraden $g_1,\ g_2$ mit dem Schnittpunkt U und zwei Punkten $E_1 \in g_1,\ E_2 \in g_2$, genannt *Einheitspunkte* (vgl. Abb. 1). U heißt *Koordinatenursprung*, die Geraden $g_1,\ g_2$ heißen *Koordinatenachsen.* Eine orientierte Gerade, d.h. eine Gerade versehen mit einem Durchlaufsinn,

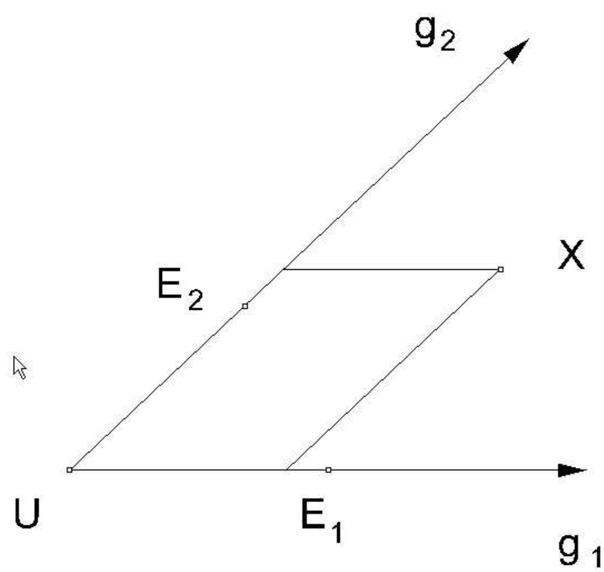

Abbildung 1: Parallelkoordinatensystem in der Ebene

heißt auch *Speer.*
Um X durch Koordinaten zu erfassen, zeichnet man wie in Abb. 1 das *Koordinatenparallelogramm* $\{U,\ X_1,\ X_2,\ X\}$ und mißt die Entfernungen $\overline{UX}_1$ und $\overline{UX}_2$ in den Einheiten $\overline{UE}_1 = e_1$ und

$\overline{UE_2} = e_2$, d.h. man setzt

$$x = \frac{\overline{UX_1}}{\overline{UE_1}} \, , \, y = \frac{\overline{UX_2}}{\overline{UE_2}} \, . \tag{14}$$

Hierbei setzt man fest, daß $x > 0$ gilt, wenn $\overline{UX_1}$ und $\overline{UE_1}$ *gleich orientiert* sind. Für $U = X_1$ ist $x = 0$ und es gelte $x < 0$, wenn $\overline{UX_1}$ und $\overline{UE_1}$ *entgegengesetzt orientiert* sind. Analoges gilt für das Vorzeichen von y. Jedem Punkt $X \in \mathrm{E}_2$ entspricht damit eindeutig ein Zahlenpaar $(x, \; y)$, seine Koordinaten bezüglich $\{U, \; E_1, \; E_2, \; g_1, \; g_2\}$, und umgekehrt.
Unter einem *Parallelkoordinatensystem in* E_3 versteht man 3 orientierte Geraden (Speere) $g_1, \; g_2, \; g_3$ - die nicht in einer Ebene liegen - mit dem Schnittpunkt U und 3 Punkten $E_1 \in g_1, \; E_2 \in g_2, \; E_3 \in g_3$, genannt *Einheitspunkte.* U heißt *Koordinatenursprung*, die Geraden $g_1, \; g_2, \; g_3$ heißen *Koordinatenachsen.*

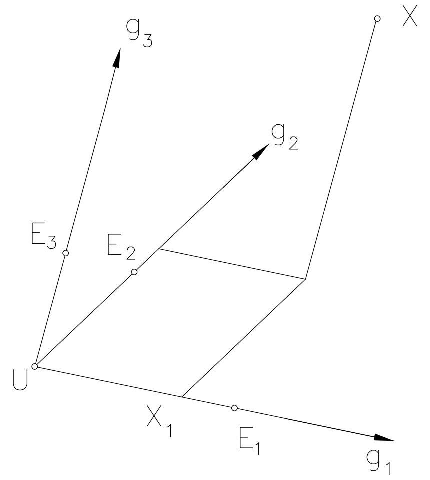

Abbildung 2: Parallelkoordinatensystem im Raum

Um $X \in \mathrm{E}_3$ durch Koordinaten zu erfassen, zeichnet man wie in Abb. 2 den *Koordinatenquader* $\{U, \; X_1, \; X_2, \; X_3, \; X', \; X'', \; X''', \; X\}$ und mißt die Entfernungen $\overline{UX_1}, \; \overline{UX_2}$ und $\overline{UX_3}$ in den Einheiten $\overline{UE_1} = e_1, \; \overline{UE_2} = e_2, \; \overline{UE_3} = e_3$, d.h. wir setzen

$$x = \frac{\overline{UX_1}}{\overline{UE_1}} \, , \, y = \frac{\overline{UX_2}}{\overline{UE_2}} \, , \, z = \frac{\overline{UX_3}}{\overline{UE_3}} \, . \tag{15}$$

Die Vorzeichen werden wie im ebenen Fall festgesetzt. Jedem Punkt $X \in \mathrm{E}_3$ entspricht damit eindeutig ein Zahlentripel (x, y, z) , seine Koordinaten bezüglich $\{U, \; E_1, \; E_2, \; E_3, \; g_1, \; g_2, \; g_3\}$ und umgekehrt. Wir vermerken den

Satz 1.3 *Ein Parallelkoordinatensystem in der Ebene* E_2 *bzw. im Raum* E_3 *ist durch 3 bzw. 4 Punkte allgemeiner Lage bestimmt. Jedem Punkt* $X \in E_2$ *bzw.* $X \in E_3$ *wird in umkehrbar eindeutiger Weise ein Zahlenpaar bzw. ein Zahlentripel gemäß 14 bzw. 15 zugewiesen, seine Parallelkoordinaten.*

Ein Parallelkoordinatensystem heißt *kartesisch*, wenn die Koordinatenachsen paarweise orthogonal sind und weiters gilt $\overline{UE_1} = \overline{UE_2} = \overline{UE_3}$. Wir bezeichnen i.f. die Koordinatenachsen mit $x, \; y$ und z.

Sind $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ zwei Punkte in E_2 , die in bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem die angegebenen Koordinaten besitzen, dann kann der Abstand $\overline{AB}$ berechnet werden gemäß

$$\overline{AB} \;=\; \sqrt[+]{(x_2-x_1)^2 \;+\; (y_2-y_1)^2} \tag{16}$$

Analog findet man für zwei Punkte $A(x_1,y_1,z_1)$ und $B(x_2,y_2,z_2)$ im Raum E_3

$$\overline{AB} \;=\; \sqrt[+]{(x_2-x_1)^2 \;+\; (y_2-y_1)^2 \;+\; (z_2-z_1)^2} \tag{17}$$

1.5 Vektoren

Definition 1.14 *Eine Strecke AB heißt orientiert, wenn man Anfangspunkt A und Endpunkt B unterscheidet. Unter der Länge einer orientierten Strecke versteht man den Abstand ihrer Randpunkte A, B gemäß Gl.(16) bzw. (17) .*

Definition 1.15 *Die Menge aller orientierten Strecken, welche dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben, heißt ein Vektor. Jedes Element dieser Menge heißt ein Repräsentant dieses Vektors. Unter der Länge (dem Betrag) eines Vektors versteht man die Länge eines beliebigen Repräsentanten. Ist diese Länge Null $(A = B)$, dann heißt der Vektor der Nullvektor. Ist diese Länge 1 , dann heißt dieser Vektor der Einheitsvektor.*

Die Abb. 3 zeigt in E_2 verschiedene Repräsentanten $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{LM}$, ... eines Vektors. Wie es die Definition fordert, muß gelten

(a) $\overline{AB} \;=\; \overline{CD} \;=\; \overline{LM}$ ... Streckenlängen gleich

(b) Die Verbindungsgeraden $a \;=\; AB$, $c \;=\; CD$ und $l \;=\; LM$ sind parallel.

(c) Die auf a, c, l durch die Streckenanfangs- bzw. Streckenendpunkte definierten Orientierungen (Richtungssinne) sind gleich.

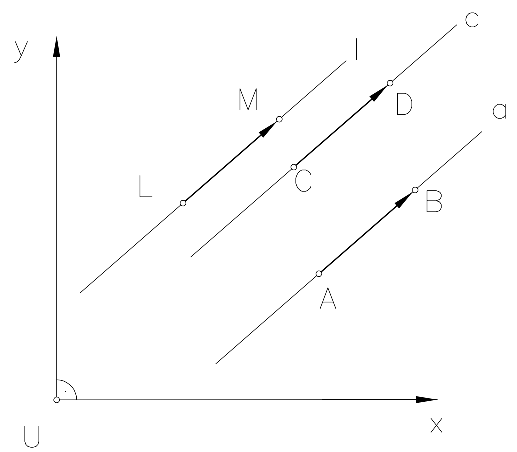

Abbildung 3: Parallelkoordinatensystem

Wir schreiben $\overrightarrow{AB} \;=\; \overrightarrow{CD} \;=\; \overrightarrow{LM}$ und verwenden zur Bezeichnung von Vektoren i.f. lateinische Buchstaben, die mit einem Pfeil überstrichen sind: $\vec{a}$, $\vec{b}$, ..., $\vec{o} \;=\; Nullvektor$, $\vec{e} \;=\; Einheitsvektor$. Den *Betrag* von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, ... bezeichnen wir i. F. mit $|\,\vec{a}\,|$, $|\,\vec{b}\,|$, ...

Die oben definierten Vektoren heißen oft *freie Vektoren*. Darf ein Vektor nur längs einer Geraden g betrachtet werden, dann heißt er *linienflüchtig*. Vektoren mit dem festen Anfangspunkt U im Koordinatenursprung heißen *Ortsvektoren*.
Im folgenden entwickeln wir kurz die wichtigsten *Operationen mit Vektoren*, wobei Beweise i.a. weggelassen werden.

1.5.1 Addition von Vektoren, Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Definition 1.16 *Gegeben 2 freie Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$. Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ ist jener Vektor, der vom Anfangspunkt von $\vec{a}$ zum Endpunkt jenes Repräsentanten von $\vec{b}$ zielt, welcher im Endpunkt von $\vec{a}$ beginnt (Parallelogrammregel).*

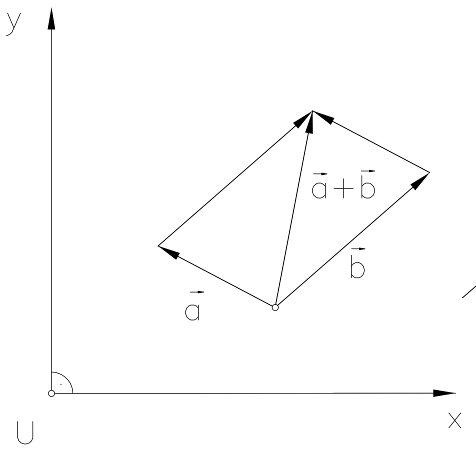

Abbildung 4: Parallelogrammregel zur Addition von Vektoren

Rechenregel:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} && \ldots \textit{Kommutativgesetz} \\
&\vec{a} + (\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b}) + \vec{c} && \ldots \textit{Assoziativgesetz} \\
&\vec{a} + \vec{o} = \vec{a}, \quad \vec{o} && \ldots \textit{Nullvektor}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Definition 1.17 *Ist $\vec{a}$ ein Vektor und $\lambda > 0 \in R$, so ist $\lambda\,\vec{a}$ jener Vektor, der zu $\vec{a}$ gleichsinning parallel ist und dessen Betrag λ-mal so groß ist wie der Betrag von $\vec{a}$. Für $\lambda < 0$ ist $\lambda\,\vec{a}$ ungleichsinnig parallel zu $\vec{a}$ und wie oben gilt $\mid \lambda\vec{a} \mid = \mid \lambda \mid \cdot \mid \vec{a} \mid$. Der Vektor zu $\lambda = -1$ heißt der zu $\vec{a}$ inverse Vektor $-\vec{a}$.*

Rechenregel:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{o} \\
&\lambda(\mu\vec{a}) = (\lambda\mu)\,\vec{a} && \ldots \textit{Assoziativgesetz} \\
&\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b} && \ldots \textit{Distributivgesetz I} \\
&(\lambda+\mu)\,\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a} && \ldots \textit{Distributivgesetz II} \\
&1 \cdot \vec{a} = \vec{a}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

1.5.2 Koordinatendarstellung von Vektoren

Definition 1.18 *Vektoren* $\{\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \ldots,\ \vec{a}_m\}$ *eines Vektorraums* $\mathbf{V}$ *heißen linear unabhängig (l.u.), wenn aus einer Linearkombination*

$$\lambda_1\vec{a}_1 \ +\ \lambda_2\vec{a}_2\ +\ \cdots\ +\ \lambda_m\vec{a}_m\ =\ \vec{o} \tag{20}$$

die den Nullvektor darstellt, stets folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$, $\{\vec{a}_1,\ \ldots\ ,\ \vec{a}_m\}$ *heißen linear abhängig (l.a.), wenn sie nicht linear unabhängig sind.*

Wir bezeichnen i.f. die Vektoren $\overrightarrow{UE}_1 = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{UE}_2 = \vec{e}_2$, $\overrightarrow{UE}_3 = \vec{e}_3$ aus den Abbildungen 1 und 2 als *Einheitsvektoren* des Parallelkoordinatensystems.

Satz 1.4 *Die Vektoren* $\vec{e}_1$ *und* $\vec{e}_2$ *in* E_2 *sind linear unabhängig. Die Vektoren* $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3$ *in* E_3 *sind linear unabhängig . Jeder Vektor* $\vec{x}$ *aus* E_2 (E_3) *läßt sich in der Gestalt*

$$\vec{x}\ =\ x_1\vec{e}_1\ +\ x_2\vec{e}_2 \qquad \textit{bzw.} \tag{21}$$

$$\vec{x}\ =\ x_1\vec{e}_1\ +\ x_2\vec{e}_2\ +\ x_3\vec{e}_3 \tag{22}$$

darstellen, wobei $x_1,\ x_2$ *bzw.* $x_1,\ x_2,\ x_3$ *eindeutig bestimmt sind.*

Ist $\vec{x}$ der Repräsentant eines Vektors durch U , so gilt $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$. Die Vektoren $x_1\vec{e}_1,\ x_2\vec{e}_2$ heißen die *Komponenten* des Vektors $\vec{x}$. Die Zahlen $x_1,\ x_2$ heißen die *Koordinaten* des Vektors $\vec{x}$.

Satz 1.5 *Besitzen 2 Ortsvektoren* $\vec{a}$ *und* $\vec{b}$ *bezüglich eines Parallelkoordinatensystems die Koordinaten* $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\ b_2,\ b_3)$ *, dann gilt*

$$\begin{aligned} \vec{a}\ +\ \vec{b}\ &=\ (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3) \\ \vec{a}\ -\ \vec{b}\ &=\ (a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ a_3-b_3) \\ \lambda\ \vec{a}\ &=\ (\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \lambda a_3). \end{aligned} \tag{23}$$

Satz 1.6 *Bezeichnet* A *den Anfangs- und* B *den Endpunkt eines Vektors* $\overrightarrow{AB}$ *und besitzt* A *bzw.* B *in einem Parallelkoordinatensystem die Koordinaten* $A\ (a_1,\ a_2,\ a_3)$, $B\ (b_1,\ b_2,\ b_3)$ *so gilt*

$$\overrightarrow{AB}\ =\ (b_1-a_1,\ b_2-a_2,\ b_3-a_3) \tag{24}$$

d.h. man erhält die Koordinaten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ *als Differenz der Koordinaten seines Endpunktes minus der Koordinaten seines Anfangspunktes.*

Definition 1.19 *Vektoren* $\{\vec{a}_1,\ \ldots\ ,\ \vec{a}_n\}$ *in einem Vektorraum* $\mathbf{V}$ *bilden eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind und sich jeder Vektor* $\vec{x} \in \mathbf{V}$ *in der Form* $\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \cdots + x_n\vec{a}_n$ *darstellen läßt. Die Zahl* n *heißt die Dimension des Vektorraumes.*

Beispiel:

1. $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2\}$ in E_2 bilden eine Basis. Der zugehörige Vektorraum $\mathbf{V_2}$ ist zweidimensional.
2. $\{\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3\}$ in E_3 bilden eine Basis. Der zugehörige Vektorraum $\mathbf{V_3}$ ist dreidimensional.

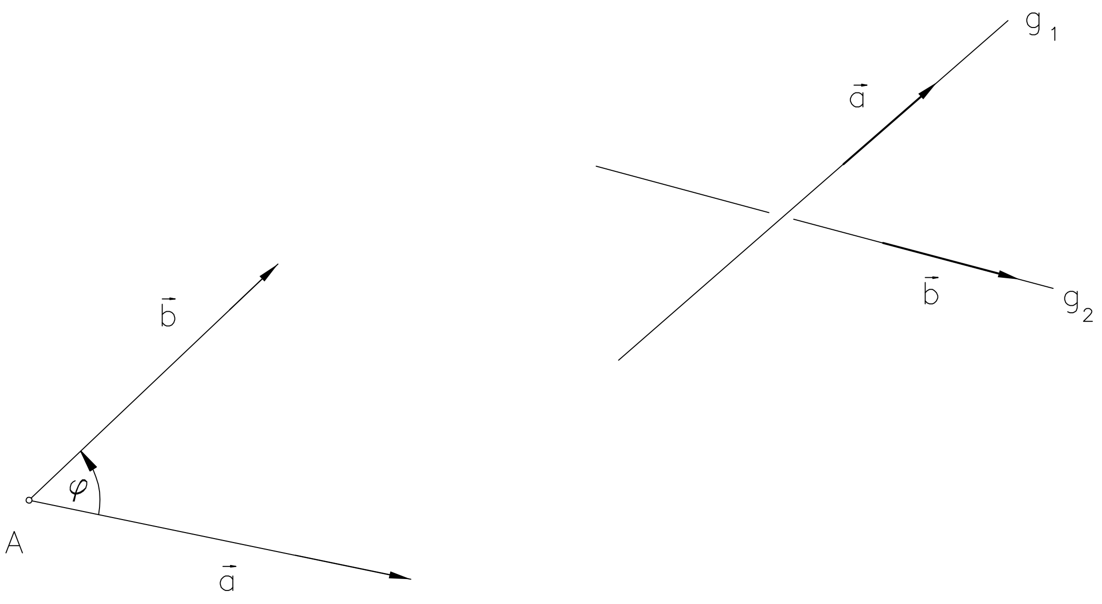

Abbildung 5: Winkel zwischen Vektoren

1.5.3 Das innere Vektorprodukt:

Unter dem Winkel zweier Vektoren $\vec{a},\ \vec{b},\ \mid \in \mathrm{E}_2$ oder E_3 versteht man den Winkel φ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen zwei Repräsentanten mit gemeinsamen Anfangspunkt A (Abb.5).
Man beachte, daß in E_3 zwei Vektoren $\vec{a},\ \vec{b}$ auf nichtschneidenden Geraden $g_1,\ g_2$ liegen können. Trotzdem ist ihr Winkel φ definiert. Es gilt $\sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b}) = -\sphericalangle(\vec{b},\ \vec{a})$.

Definition 1.20 *Sind $\vec{a},\ \vec{b}$ Vektoren aus E_2 (E_3) und ist φ ihr Winkel, so versteht man unter dem inneren Vektorprodukt (Skalarprodukt) von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ die Zahl*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0\ , \quad falls \quad \vec{a} = \vec{o} \quad oder \quad \vec{b} = \vec{o} \tag{6.11}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \ \ cos \ \sphericalangle(\vec{a},\ \vec{b})\ , \quad falls \quad \vec{a} \neq \vec{o},\ \vec{b} \neq \vec{o}. \tag{25}$$

<u>Folgerungen:</u>

1. Man beachte, daß das innere Vektorprodukt eine Zahl ist.

2. Stehen zwei Vektoren aufeinander normal (orthogonal), d.h. ist $\varphi = 90^\circ$, so folgt $\cos\ 90^\circ = 0$, d.h. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

3. Ist $\vec{a} \cdot \vec{b} \geq 0$, so bilden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ einen Winkel φ mit $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$; für $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$.

4. Für $\vec{b} = \vec{a}$ ist $\varphi = 0$ und man findet $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{a}\,| = |\,\vec{a}\,|^2$, d.h. $|\,\vec{a}\,| = \sqrt[+]{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

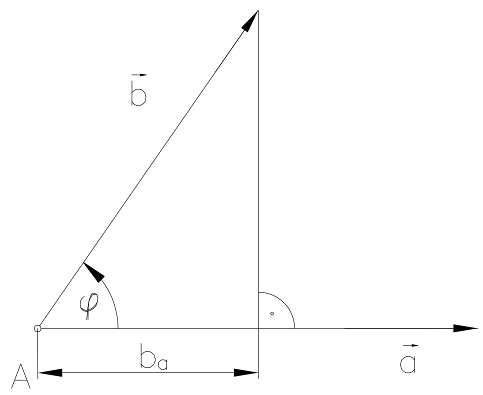

Abbildung 6: Inneres Produkt - Normalprojektion

5. Es bezeichne b_a die Länge der Normalprojektion von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$ (vgl. Abb.6), falls φ spitz ist.

   Dann gilt $b_a = |\vec{b}| \; cos\, \varphi$. Damit gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, b_a$. Ist φ stumpf, dann setzen wir $b_a := -b_{-a}$ und es gilt auch hier $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\, b_a$.

Wir fassen zusammen und ergänzen einiges im

Satz 1.7 *Das innere Produkt von 2 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}\,| \neq \vec{o}$ verschwindet genau dann, wenn die Vektoren zueinander senkrecht sind. Es gilt*

$$|\vec{a}| = \sqrt[+]{\vec{a} \cdot \vec{a}} \tag{26}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\; b_a \tag{27}$$

Weiters gelten folgende Rechenregeln:.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= \vec{b} \cdot \vec{a} \\ (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} &= \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) \\ \vec{a} \cdot (\vec{b}+\vec{c}) &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned} \tag{28}$$

Ein Assoziativgesetz gilt nicht. Besitzen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezüglich einer Orthonormalbasis die Koordinaten $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dann gilt für ihr inneres Produkt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = \vec{a} \cdot \vec{b}^T \tag{29}$$

Für ihren Winkel φ gilt bezüglich dieser Orthonormalbasis

$$\cos\, \varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} . \tag{30}$$

Eine Basis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ heißt eine *Orthonormalbasis*, wenn die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ paarweise *aufeinander senkrecht* stehen und die *Länge 1* besitzen. Dies bedeutet nach Satz 1.7, 1. Aussage $|\vec{e}_j|^2 = 1 = \vec{e}_j \cdot \vec{e}_j$ $(j = 1, 2, 3)$ und nach 27 $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = g_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Damit folgt aus obigem $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, d.h. (29) .

Mit dem Zeilenvektor $\vec{a} = (a_1,\ a_2,\ a_3)$ und dem Spaltenvektor $\vec{b}^T = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt ersichtlich $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b}^T$. Aus (29) folgt weiter $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, d.h. $|\,\vec{a}\,| = \sqrt[+]{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ und analog $|\,\vec{b}\,| = \sqrt[+]{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$, womit Gleichung (30) gezeigt ist.

Bemerkungen:

1. Liegt in E_2 oder E_3 ein kartesisches Koordinatensystem vor, dann bilden die Basisvektoren ein Orthonormalsystem.

2. Die kanonische Basis $\vec{e}_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\vec{e}_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$, $\ldots$, $\vec{e}_n\,(0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$ in R^n ist ein Orthonormalsystem, wenn man in R^n das innere Produkt formal gemäß (25) definiert.

3. Oft benützt man das KRONECKER-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 \ , & falls \ i \neq j \\ 1 \ , & falls \ i = j. \end{cases} \tag{31}$$

Dann gilt nach obigem für eine Orthonormalbasis

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}. \tag{32}$$

1.5.4 Das äußere Vektorprodukt:

Das äußere Vektorprodukt ist nur in E_3 definiert und ordnet - anders als in Abschnitt 1.5.3 - jedem Vektorpaar $\vec{a}$, $\vec{b}$ wieder einen Vektor zu gemäß der folgenden

Definition 1.21 *Das äußere (vektorielle) Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a} \neq \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ aus E_3 ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der Fläche des durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bestimmten Parallelogrammes ist, auf die Ebene dieses Parallelogrammes senkrecht steht und so orientiert ist, daß $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Ist mindestens einer der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ der Nullvektor, dann ist $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.*

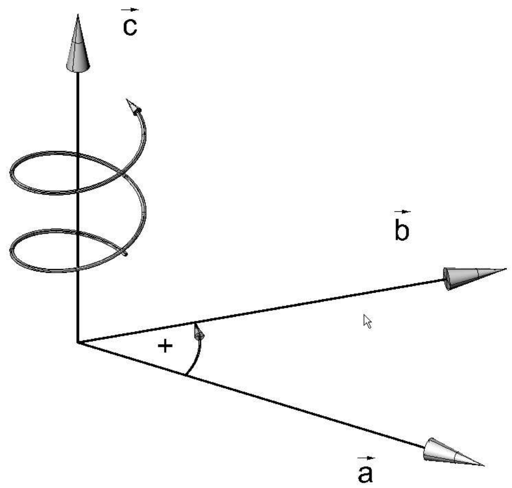

Abbildung 7: Äußeres Vektorprodukt - Rechtsschraubung

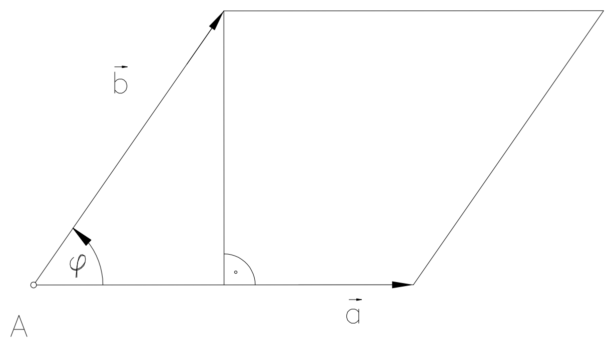

Abbildung 8: Parallelogramm

Anmerkungen und Folgerungen:

1. Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ bilden ein Rechtssystem (vgl. Abb. 11), wenn sie so aufeinander folgen, wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Man kann dies auch so ausdrücken: $\vec{c}$ zeigt in jene Richtung, in die eine *Rechtsschraube* vorrückt, wenn man ihr jene Drehung erteilt, die den Vektor $\vec{a}$ in den Vektor $\vec{b}$ überführt und zwar um dem *kleineren* der möglichen *Drehwinkel.*

2. Für den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogrammes (vgl. Abb.8) ergibt sich
$$F = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cdot |\;sin\;\sphericalangle(\vec{a},\,\vec{b})\;|\,. \tag{33}$$

3. Gilt in (33) $F = 0$, so folgt wegen $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$, daß $sin\;\sphericalangle(\vec{a},\,\vec{b}) = 0$ gilt. Dann sind aber $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel bzw. antiparallel, d.h. sicher linear abhängig. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

Wir fassen zusammen und ergänzen einiges in

Satz 1.8 *Das äußere Produkt von 2 Vektoren $\vec{a} \neq \vec{o}$, $\vec{b} \neq \vec{o}$ verschwindet genau dann, wenn die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear abhängig sind. Weiters gelten folgende Rechenregeln*

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a} && \ldots\ \textit{Antikommutativgesetz}\\
&(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \times \vec{c}) + (\vec{b} \times \vec{c}) && \ldots\ \textit{Distributivgesetze}\\
&\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c}) &&\\
&(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda\,(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) \qquad (34) &&
\end{aligned}$$

Ein Assoziativgesetz gilt nicht. Besitzen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bezüglich einer Orthonormalbasis die Koordinaten $\vec{a} = (a_1,\, a_2,\, a_3)$, $\vec{b} = (b_1,\, b_2,\, b_3)$, dann besitzt der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ die Koordinaten
$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \tag{35}$$
nach der formalen Entwicklung gemäß der ersten Determinantenzeile
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \tag{36}$$

Beweis:

1. Um (34, erste Gleichung) einzusehen, ist nur zu beachten, daß die Beträge und Richtungen von $\vec{a} \times \vec{b}$ übereinstimmen, daß aber die Orientierungen verschieden sind. Auf die Beweise der übrigen Gleichungen wird verzichtet

2. Für die Einheitsvektoren eines *orthonormierten Rechtssystems* (vgl. Abb.9) gilt ersichtlich wobei die letzten drei Gleichungen aus den ersten drei Gleichungen mittels (34) folgen.

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \\
\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 &= \vec{e}_1 \\
\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 &= \vec{e}_2 \qquad (37)\\
\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 &= -\vec{e}_3 \\
\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 &= -\vec{e}_1 \\
\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 &= -\vec{e}_2
\end{aligned}$$

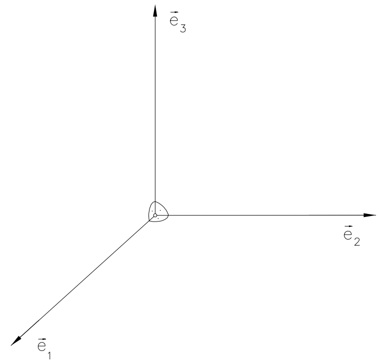

Abbildung 9: Kartesisches Koordinatensystem

Gilt in diesem Rechtssystem $\vec{a} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3$, $\vec{b} = b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3$, so folgt mittels (34) und (36):

$$\begin{gathered}
\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + a_3\,\vec{e}_3) \times (b_1\,\vec{e}_1 + b_2\,\vec{e}_2 + b_3\,\vec{e}_3) = \\
= a_1\,b_1\,(\vec{e}_1 \times \vec{e}_1) + a_2\,b_1\,(\vec{e}_2 \times \vec{e}_1) + a_3\,b_1\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_1) + a_1\,b_2\,(\vec{e}_1 \times \vec{e}_2) + \\
+ a_2\,b_2\,(\vec{e}_2 \times \vec{e}_2) + a_3\,b_2\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_2) + a_1\,b_3\,(\vec{e}_1 \times \vec{e}_3) + a_2\,b_3\,(\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) + \\
+ a_3\,b_3\,(\vec{e}_3 \times \vec{e}_3) = (a_2\,b_3 - a_3\,b_2)\,\vec{e}_1 + (a_3\,b_1 - a_1\,b_3)\,\vec{e}_2 + (a_1\,b_2 - a_2\,b_1)\,\vec{e}_3
\end{gathered}$$

Hierbei wurde benützt, daß $\vec{e}_j \times \vec{e}_j = \vec{o}$ gilt. Die Koordinaten von $\vec{a} \times \vec{b}$ besitzen somit die in (35) angegebenen Determinatenwerte.

Entwickelt man (36) formal hinsichtlich der ersten Zeile, so liefert dies genau obige Darstellung von $\vec{a} \times \vec{b}$. Beachte, daß es sich nur um eine *formale Entwicklung* handelt, denn in der ersten Zeile von (36) stehen ja keine Zahlen sondern Vektoren.