3 Differentialgeometrische Eigenschaften von Kurven und Flächen

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine kurze Einführung in die Anfangsgründe der mathematischen Theorie der Raumkurven und Flächen zu geben. Die Resultate werden wir später bei verschiedensten konstruktiven Anwendungen benötigen. Bezüglich einer genaueren Behandlung sei vor allem auf Brauner, Konstruktive Geometrie, Kapitel 7 bzw. Bohne/Klix, Geometrie, Kapitel 6 verwiesen.

3.1 Raumkurven

Eine Kurve c heißt eine *Raumkurve*, wenn sie nicht ganz in einer Ebene liegt. Beispiele solcher Raumkurven haben wir bei den Schnittkurven zweier Flächen kennengelernt. Zur mathematischen Darstellung benutzt man zweckmäßig eine *Parameterdarstellung*, die man oft vektoriell schreibt:

$$\vec{x} = \vec{x}(t) \ldots \{x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in I \subset \mathbb{R}\} \tag{1}$$

Ein Beispiel für eine Raumkurve ist:

$$\vec{x}(t) = \{x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3\} \tag{2}$$

Diese Raumkurve wird unsere Beispielskurve in diesem Kapitel sein. Sie ist in den Abb. 1-3 in

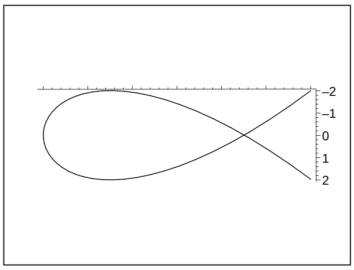

Abbildung 1: Grundriss

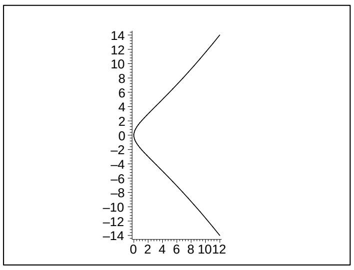

Abbildung 2: Aufriss

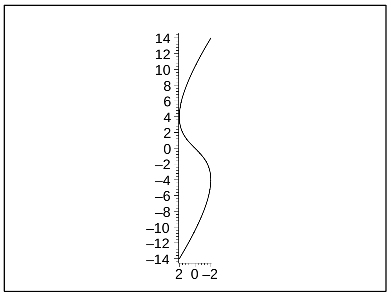

Abbildung 3: Kreuzriss

Grundriss, Aufriss und Kreuzriss dargestellt. Abbildung 4 zeigt eine axonometrische Darstellung der Kurve.

3.1.1 Tangenten an Raumkurven:

Definition: Eine Tangente t durch einen Punkt P eines Kurvenstückes k ist die Grenzlage von Sehnengeraden PP_1, wenn P_1 auf k gegen P läuft (Abb. 5). In der Darstellung 1 ist der Richtungsvektor der Tangente der erste Ableitungsvektor, also $fracd\vec{x}dt := \dot{\vec{x}}$. Damit lautet die Vektordarstellung der Tangente in Punkte $P(t_0) \in k$:

$$\vec{y} = \vec{x}(t_0) + \lambda \dot{\vec{x}}(t_0) \tag{3}$$

Wenden wir dieses konkret an Beispiel 2 an und zwar für $t_0 = 1$. Wir erhalten: $\vec{x}(t_0) = = \{2, 3, 4\}$, $\dot{\vec{x}}(t) = \{\dot{x} = 3 - 3t^2, \dot{y} = 6t, \dot{z} = 3 + 3t^2\}$ und $\dot{\vec{x}}(t_0) = \{\dot{x} = 0, \dot{y} = 6, \dot{z} = 6\}$ und damit insgesamt:

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{4}$$

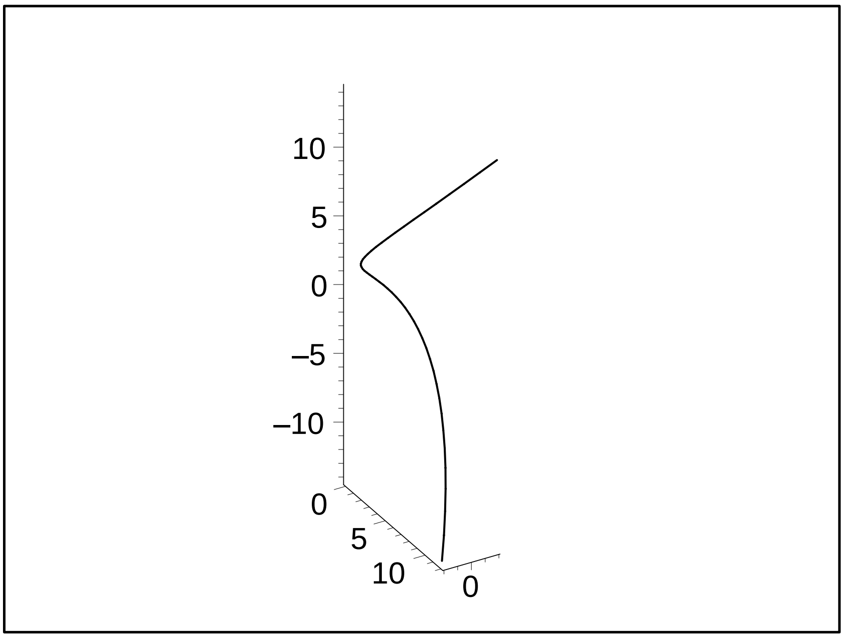

Abbildung 4: Raumkurve

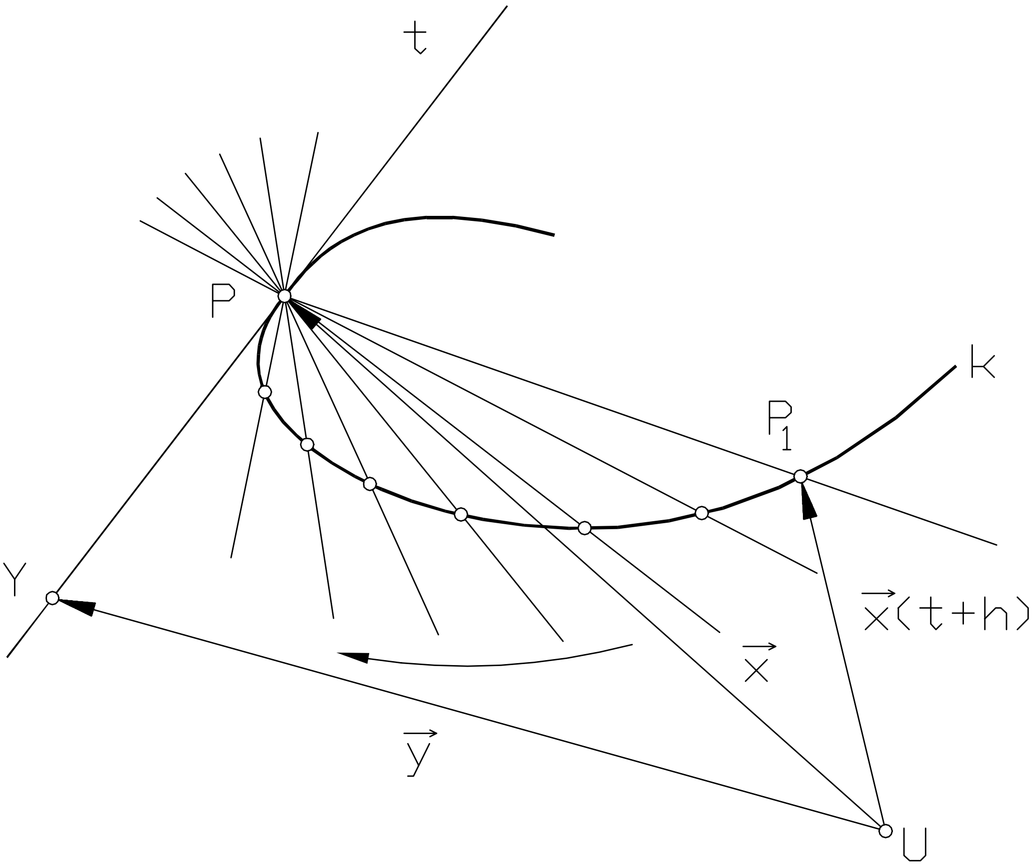

Abbildung 5: Tangente

t existiert nur dann, wenn $\dot{\vec{x}}(t_0) \neq 0$ ist. Ein Punkt mit $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\} \neq \{0, 0, 0\}$ heißt ein *regulärer Punkt* der Raumkurve k. Ein Punkt $P(t_0)$ mit $\dot{\vec{x}}(t_0) = \vec{0}$ heißt ein *singulärer Punkt* der Raumkurve k. Ein singulärer Punkt ist z.B. der Doppelpunkt der Durchdringungskurve von Abb. 5.18.

3.1.2 Schmiegebene:

Definition: Eine Ebene σ durch eine Tangente t in einem Punkt P eines nicht geradlinigen Kurvenstücks k heißt *Schmiegebene* von k in P zur Tangente t, wenn sie Grenzlage von Ebenen tP_1 ist und P_1 auf k gegen P läuft, so dass $t = \lim_{P_1 \to P} PP_1$ gilt (Abb.6). Man kann zeigen,

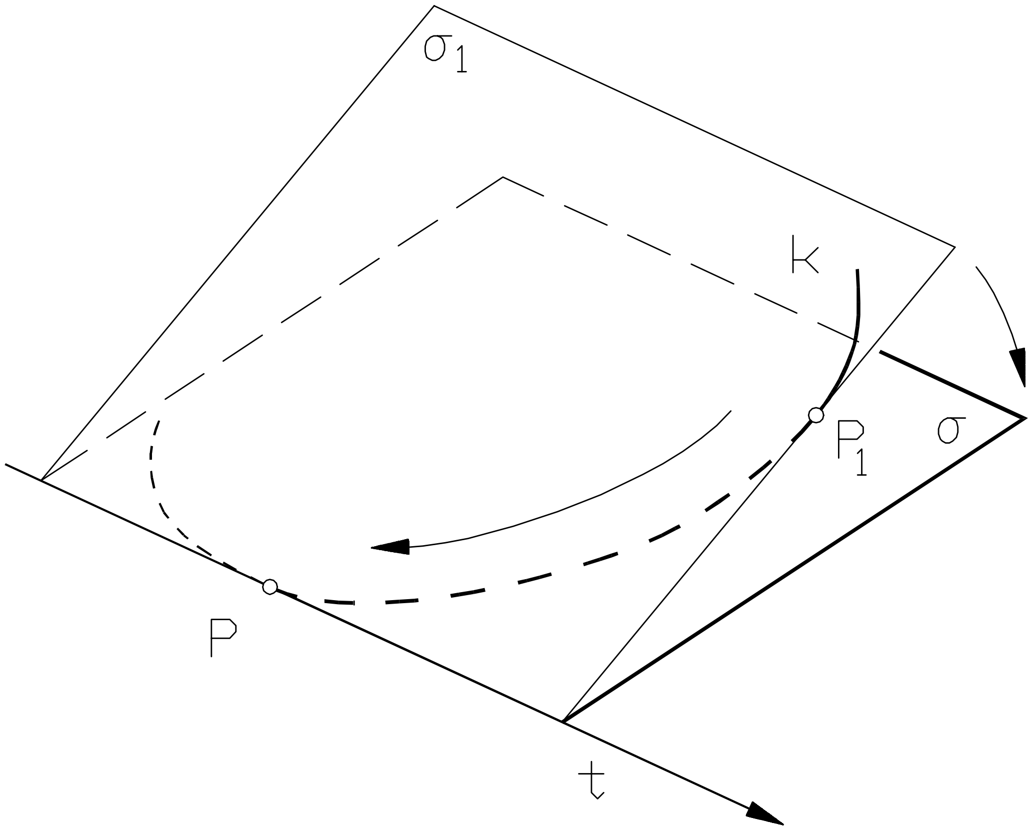

Abbildung 6: Schmiegebene

dass σ existiert, wenn $\vec{x}(t)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und ausserdem P kein Wendepunkt ist d.h. wenn $\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}} \neq \vec{0}$ in $P(t_0)$ gilt. Die Schmiegebene hat die Darstellung

$$\sigma \ldots \left|(\vec{X} - \vec{x}(t_0), \dot{\vec{x}}(t_0), \ddot{\vec{x}}(t_0))\right| = 0 \tag{5}$$

Für die Beispielskurve 2 bedeutet dies: $\ddot{\vec{x}} = \{\ddot{x} = -6t, \ddot{y} = 6, \ddot{z} = 6t\}$. Rechnen wir die Schmiegebene für $t = 1$ aus, dann ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} X-2 & 0 & -6 \\ Y-3 & 6 & 6 \\ Z-4 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Ausrechnen liefert: $Z - Y = 1$.

3.1.3 Begleitendes Dreibein der Raumkurve

Durch einen Punkt P der Raumkurve gibt es ein ganzes Stahlbüschel von Normalen auf die Tangente t. Unter diesen Normalen ist jene ausgezeichnet, die in der Schmiegebene σ liegt: sie heißt *Hauptnormale* h. Ergänzt man nun t und h durch eine weitere Normale b auf t so, dass $\{t, h, b\}$ Achsen eines kartesischen Rechtskoordinatensystems sind, so bezeichnet man $\{t, n, b\}$

als *begleitendes Dreibein* der Raumkurve c (Abb.7). Die Gerade b heißt die *Binormale* von c in P. Die Basisvektoren des begleitenden Dreibeins erhält man durch:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} = \frac{\dot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}}|} \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_3 \times \vec{e}_1 \\ \vec{e}_3 &= \frac{\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}}{|\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}|} \end{aligned} \tag{7}$$

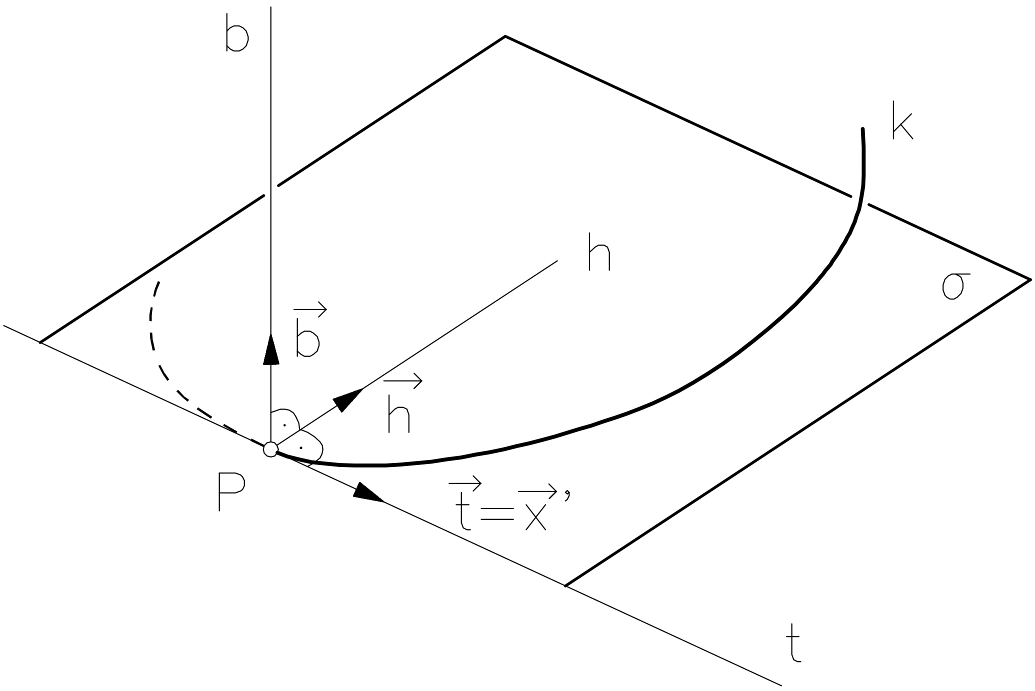

Abbildung 7: Begleitendes Dreibein

3.1.4 Krümmungskreis:

Wir denken uns in der Ebene σ_1 einen Kreis c_1 gezeichnet, der k in P berührt und durch P_1 geht; c_1 ist durch einen Punkt P samt Tangente t und einen weiteren Punkt P_1 eindeutig bestimmt (Abb. 8)

Der Grenzkreis $\lim_{P_1 \to P} c_1 =: c^*$ heißt der *Krümmungskreis* von k in P. Der Krümmungskreis c^* liegt in der Schmiegebene σ; sein Mittelpunkt M^* liegt auf der Hauptnormalen n. M^* wird als *Krümmungsmittelpunkt (Krümmungsmitte)* bezeichnet. Den Radius von c^*, also $\rho^* := M^*\overline{P}$, nennt man den *Krümmungsradius*. Der Reziprokwert $\frac{1}{\rho^*} =: \kappa^*$ heißt die *Krümmung* von c in P. κ^* kann nach der Formel

$$\kappa^* = \frac{|\dot{\vec{x}} \ \times \ \ddot{\vec{x}}|}{|\dot{\vec{x}}|^3} \tag{8}$$

berechnet werden. Wir berechnen als Beispiel die Krümmung der Kurve (2) im Punkt P, der

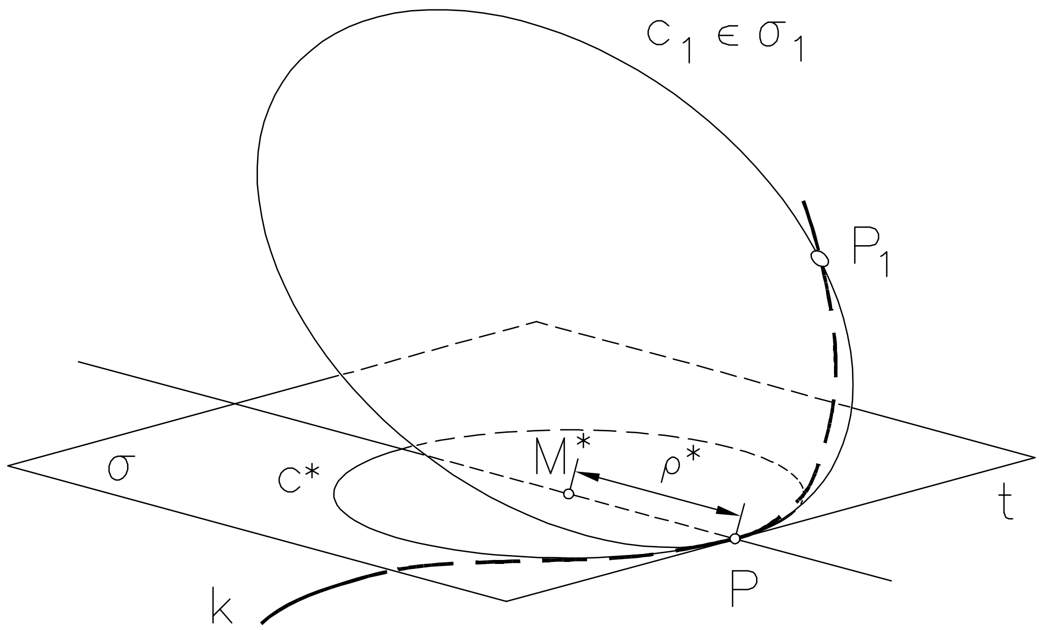

Abbildung 8: Krümmungskreis

zum Parameterwert $t = 1$ gehört. Wir erhalten

$$\kappa^*(t_0) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 36 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}\right|^3} = \frac{1}{12}, \tag{9}$$

woraus sich als Krümmungsradius 12 ergibt.

3.2 Flächen

Wir erinnern zunächst die für eine mathematische Behandlung notwendigen Darstellungsformen von Flächen die im vorigen Abschnitt eingeführt worden sind:

1. Explizite Form: $z = f(xy)$ Beispiel: $z = \sin\ x \cos\ y$
2. Implizite Form: $F(x, y, z) = 0$ Beispiel: $(x^2 + y^2 - z - 1)^2 - 4z = 0$
3. Parameterdarstellung:$\{x = f(u, v)y = g(u, v)z = h(y, v)\}$

Beispiel (Möbiusband) :

$$\begin{aligned} x &= \cos v - u \cos v \cos \frac{v}{2} \\ y &= \sin v - u \sin v \sin \frac{v}{2} \\ z &= u \sin \frac{v}{2} \end{aligned}$$

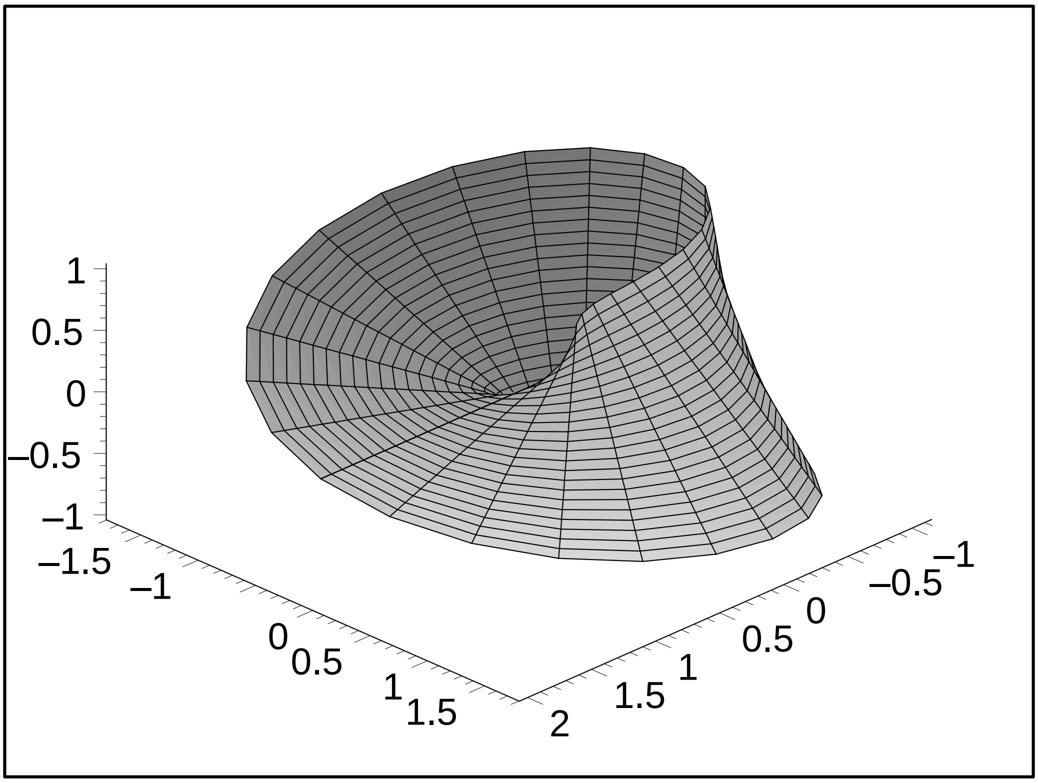

Abbildung 9: Moebiusband

<u>Definition:</u> *Eine Kurve c, die ganz auf einer Fläche Φ liegt, heißt eine Flächenkurve.*

Eine Flächenkurve läßt sich darstellen, indem man u und v in der Parameterdarstellung als Funktionen eines Parameters vorschreibt. Damit folgt aus $\vec{x} = \vec{x}(u(t), v(t)) = \vec{x}(t)$, und dies ist eine Kurve, die ganz auf der Fläche Φ liegt. Als Beispiel nehmen wir die Flächengleichung $(x = -\sin u(4 + 2\cos v),\ y = \cos u(4 + 2\cos v),\ z = 2\sin v)$ und setzen $u = t$ und $v = 8t$. Wir erhalten die Parameterdarstellung:

$$\vec{x}(t) \ldots \begin{cases} x = -\sin\ t(4 + 2\cos\ 8t) \\ y = \cos\ t(4 + 2\cos\ 8t) \\ z = 2\sin\ 8t \end{cases} \tag{10}$$

Abbildung 10 zeigt einen Plot dieser Kurve, die ganz offensichtlich auf einem Torus liegt.

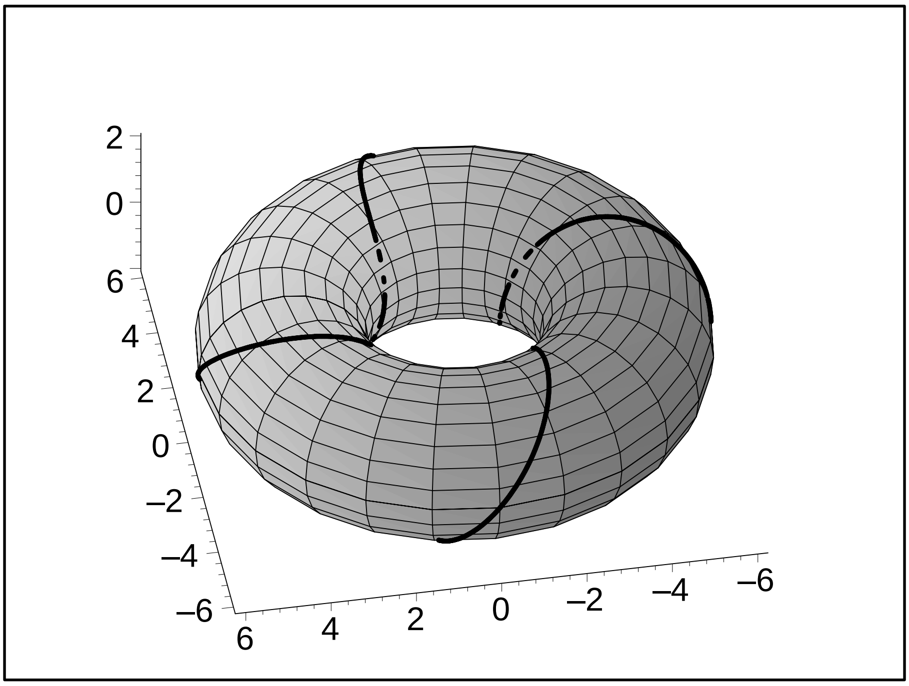

Abbildung 10: Kurve auf einem Torus

Wir betrachten jetzt die Tangenten an alle Flächenkurven, die durch einen festen Punkt $P(u_0, v_0) \in \Phi$ hindurchgehen. Für den Richtungsvektor einer solchen Tangente findet man

$$\dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{x}_u \frac{du}{dt} + \vec{x}_v \frac{dv}{dt} \tag{11}$$

wobei die Vektoren $\vec{x}_u = \frac{d\vec{x}}{du}$, $\vec{x}_v = \frac{d\vec{x}}{dv}$ an der Stelle (u_0, v_0) zu nehmen sind und $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ für $t = t_0$ zu berechnen sind. Für verschiedene Kurven durch $P(u_0, v_0)$ durchlaufen somit $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ eine Menge reeller Zahlenpaare, d.h. $\dot{\vec{x}}$ liegt stets in der von $\vec{x}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{x}_v(u_0, v_0)$ aufgespannten Ebene τ, falls $\vec{x}_u$ und $\vec{x}_v$ linear unabhängig sind. Flächenpunkte $P(u_0, v_0)$, für die $\vec{x}_u(u_0, v_0)$ und $\vec{x}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, heißen *reguläre Flächenpunkte*. Flächenpunkte $P(u_0, v_0)$ mit $\vec{x}_u(u_0, v_0) \times \vec{x}_v(u_0, v_0) = \vec{0}$ heißen *singuläre Flächenpunkte*. Dann gilt der

Satz 3.1 *Die Tangenten an sämtliche Flächenkurven, die durch einen regulären Flächenpunkt P hindurchgehen, liegen in einer Ebene, der Tangentialebene τ des Flächenpunktes P.*

Definition: Die Gerade n, die durch P läuft und zur Tangentialebene $\tau(P)$ orthogonal ist, heißt *Flächennormale* des Punktes P. Jede Gerade g, die Tangente einer Flächenkurve ist, heißt *Flächentangente*.

Für die implizite Flächendarstellung lautet die Gleichung der Tangentialebene τ im Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \tag{12}$$

Für die implizite Form der Flächendarstellung wurde die Tangentialebene bereits im Kapitel 5 mit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(z - z_0) = 0 \tag{13}$$

angegeben. Für die Parameterdarstellung erhalten wir die Vektordarstellung von τ im Punkt $P(u_0, v_0)$:

$$\tau \ldots \vec{y} = \vec{x}(u_0, v_0) + \lambda \vec{x}_u + \mu \vec{x}_v \tag{14}$$

Ein singulärer Punkt P einer Fläche mit der Darstellung $F(x,y,z) = 0$ liegt vor, wenn gilt $\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0$. Von den drei obigen Beispielen hat nur die durch die implizite Gleichung gegebene Fläche einen singulären Punkt. Wir erhalten ihn durch Lösen des Gleichungssystems $\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \frac{\partial F}{\partial x} = 0, F = 0$. Konkret ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &: 4x(x^2+y^2-z^2-1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &: 4y(x^2+y^2-z^2-1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &: -2(x^2+y^2-z+1) = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

Lösung des Systems 15 und $F = 0$ ist der Punkt $(0,0,1)$, in ihm existiert keine eindeutig bestimmte Tangentialebene an die Fläche. In Abb.11 sieht man den Punkt als den Knoten auf der Fläche.

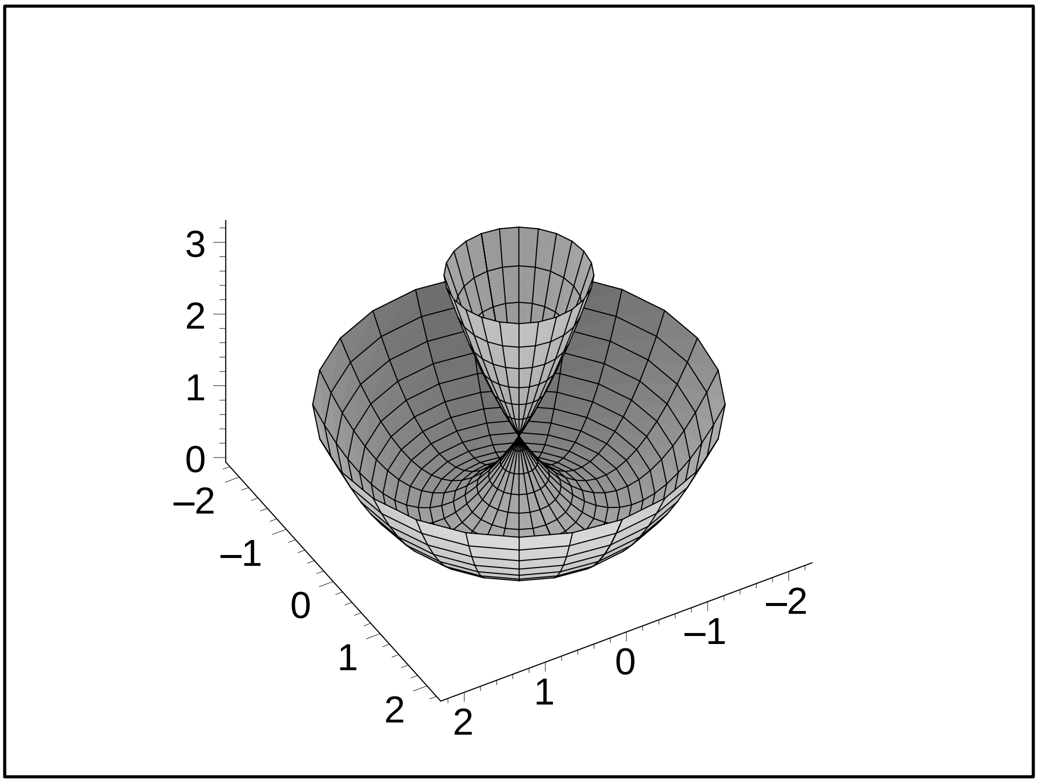

Abbildung 11: Singulärer Punkt auf einer Fläche

3.3 Übersichtsfragen

1. Was ist eine Raumkurve, wie sieht die Parameterdarstellung einer Raumkurve aus?
2. Wie ist eine Tangente an eine Raumkurve definiert?
3. Was versteht man unter der Schmiegebene in einem Kurvenpunkt einer Raumkurve?
4. Was ist ein begleitendes Dreibein einer Raumkurve?
5. Wie ist der Krümmungskreis in einem Punkt einer Raumkurve definiert? Wie hängen Krümmungsradius und Krümmung zusammen?

6. Welche mathematischen Darstellungformen gibt es für Flächen? Welche Darstellungsform ist für die Computergraphik am geeignetsten?

7. Was versteht man unter einer Flächenkurve? Wie kommt man von der Parameterdarstellung einer Fläche zur Parameterdarstellung einer Kurve auf dieser Fläche?

8. Wann liegt ein singulärer Punkt auf einer Fläche vor? (Beispiel?)