

MATHEMATISCHES DENKEN

Univ.Prof. Dr. Manfred Husty

WS 2005/2006

Kapitel 1

Koordinaten, Vektoren und Matrizen

Der erste Abschnitt ist mathematischen Grundlagen der Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen und deren Transformationen gewidmet. Wir bedienen uns dazu der Hilfsmittel der **Vektorrechnung**, der **Matrizenrechnung** und den **Determinanten**. Dieser Abschnitt stellt damit alle jene Begriffe und Methoden bereit, die für eine mathematische Beschreibung des 3-dim Raumes bzw. den geometrischen Grundlagen des CAD erforderlich sind. Wesentliche Strukturen werden zunächst an Beispielen herausgearbeitet.

1.1 Koordinaten

Wir bezeichnen mit \mathcal{E}_2 die *euklidische Ebene* (Anschauungsebene) und mit \mathcal{E}_3 den *euklidischen Raum* (Anschauungsraum). Unter einem *Parallelkoordinatensystem in \mathcal{E}_2* versteht man 2 orientierte Geraden g_1, g_2 mit dem Schnittpunkt U und zwei Punkten $E_1 \in g_1, E_2 \in g_2$, genannt *Einheitspunkte* (vgl. Abb. 1.1). U heißt *Koordinatenursprung*, die Geraden g_1, g_2 heißen *Koordinatenachsen*. Eine orientierte Gerade, d.h. eine Gerade versehen mit einem Durchlaufsinne, heißt auch *Speer*.

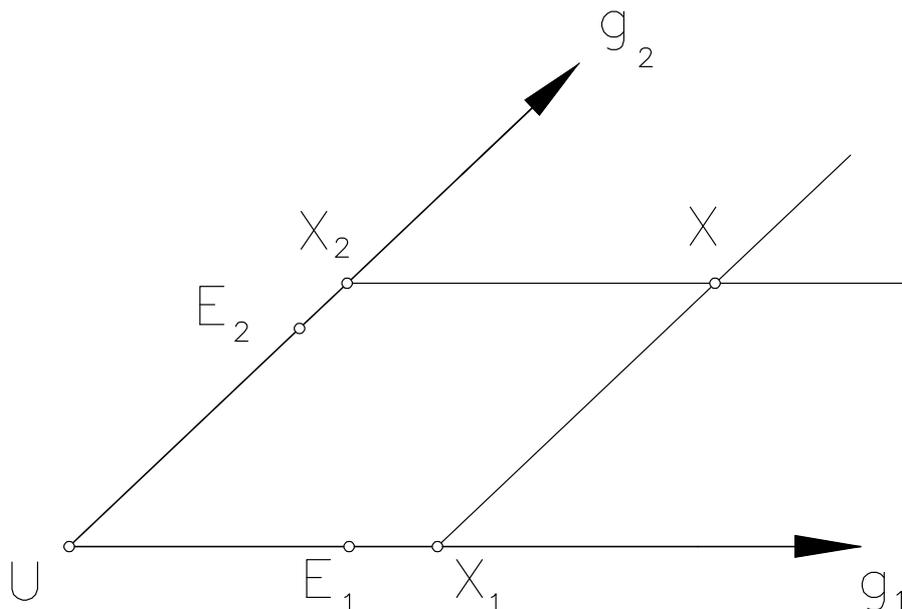


Abbildung 1.1: Parallelkoordinatensystem in der Ebene

Um X durch Koordinaten zu erfassen, zeichnet man wie in Abb. 1 das *Koordinatenparallelogramm*

$\{U, X_1, X_2, X\}$ und mißt die Entfernungen $\overline{UX_1}$ und $\overline{UX_2}$ in den Einheiten $\overline{UE_1} = e_1$ und $\overline{UE_2} = e_2$, d.h. man setzt

$$x = \frac{\overline{UX_1}}{\overline{UE_1}}, y = \frac{\overline{UX_2}}{\overline{UE_2}}. \tag{1.1}$$

Hierbei setzt man fest, dass $x > 0$ gilt, wenn $\overline{UX_1}$ und $\overline{UE_1}$ *gleich orientiert* sind. Für $U = X_1$ ist $x = 0$ und es gelte $x < 0$, wenn $\overline{UX_1}$ und $\overline{UE_1}$ *entgegengesetzt orientiert* sind. Analoges gilt für das Vorzeichen von y . Jedem Punkt $X \in E_2$ entspricht damit eindeutig ein Zahlenpaar (x, y) , seine Koordinaten bezüglich $\{U, E_1, E_2, g_1, g_2\}$ und umgekehrt.

Unter einem *Parallelkoordinatensystem in \mathcal{E}_3* versteht man 3 orientierte Geraden (Speere) g_1, g_2, g_3 - die nicht in einer Ebene liegen - mit dem Schnittpunkt U und 3 Punkten $E_1 \in g_1, E_2 \in g_2, E_3 \in g_3$, genannt *Einheitspunkte*. U heißt *Koordinatenursprung*, die Geraden g_1, g_2, g_3 heißen *Koordinatenachsen*.

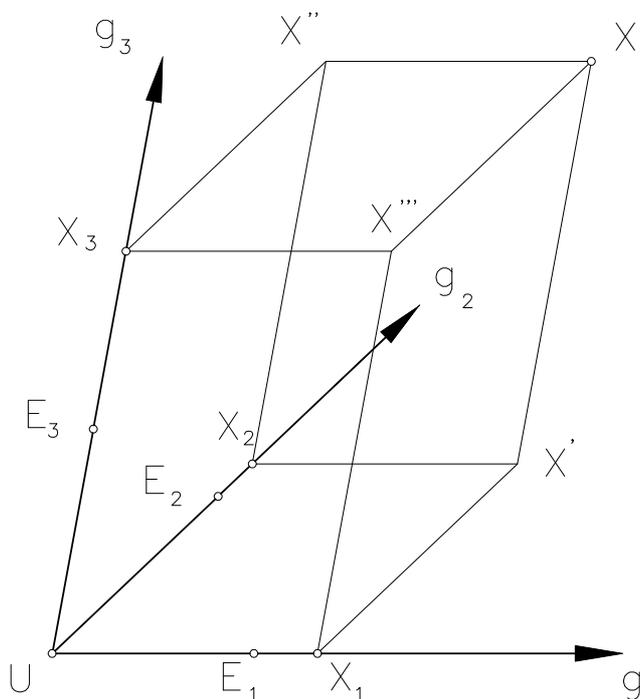


Abbildung 1.2: Parallelkoordinatensystem im Raum

Um $X \in \mathcal{E}_3$ durch Koordinaten zu erfassen, zeichnet man wie in Abb. 2 den *Koordinatenquader* $\{U, X_1, X_2, X_3, X', X'', X''', X\}$ und mißt die Entfernungen $\overline{UX_1}$, $\overline{UX_2}$ und $\overline{UX_3}$ in den Einheiten $\overline{UE_1} = e_1, \overline{UE_2} = e_2, \overline{UE_3} = e_3$, d.h. wir setzen

$$x = \frac{\overline{UX_1}}{\overline{UE_1}}, y = \frac{\overline{UX_2}}{\overline{UE_2}}, z = \frac{\overline{UX_3}}{\overline{UE_3}}. \tag{1.2}$$

Die Vorzeichen werden wie im ebenen Fall festgesetzt. Jedem Punkt $X \in \mathcal{E}_3$ entspricht damit eindeutig ein Zahlentripel (x, y, z) , seine Koordinaten bezüglich $\{U, E_1, E_2, E_3, g_1, g_2, g_3\}$ und umgekehrt. Wir vermerken den

Satz 1.1.1 *Ein Parallelkoordinatensystem in der Ebene \mathcal{E}_2 bzw. im Raum \mathcal{E}_3 ist durch 3 bzw. 4 Punkte allgemeiner Lage bestimmt. Jedem Punkt $X \in \mathcal{E}_2$ bzw. $X \in \mathcal{E}_3$ wird in umkehrbar eindeutiger Weise ein Zahlenpaar bzw. ein Zahlentripel gemäß (1.1) bzw. (1.2) zugewiesen, seine Parallelkoordinaten.*

Ein Parallelkoordinatensystem heißt *kartesisch*, wenn die Koordinatenachsen paarweise orthogonal sind und weiters gilt $\overline{UE_1} = \overline{UE_2} = \overline{UE_3}$. Wir bezeichnen i.f. die Koordinatenachsen mit x , y und z .

Sind $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ zwei Punkte in \mathcal{E}_2 , die in bezug auf ein kartesisches Koordinatensystem die angegebenen Koordinaten besitzen, dann kann der Abstand \overline{AB} berechnet werden gemäß

$$\overline{AB} = \sqrt[+]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.3)$$

Analog findet man für zwei Punkte $A(x_1, y_1, z_1)$ und $B(x_2, y_2, z_2)$ im Raum \mathcal{E}_3

$$\overline{AB} = \sqrt[+]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (1.4)$$

Beispiel 1.1.1 In einem kartesischen Koordinatensystem seien die beiden Punkte $A(1, 3, 7)$ und $B(2, 5, 5)$ gegeben. Man berechne ihren Abstand.

$$\overline{AB} = \sqrt[+]{(2 - 1)^2 + (5 - 3)^2 + (5 - 7)^2} = \sqrt[+]{9} = 3$$

Beispiel 1.1.2 In der euklidischen Ebene sei ein Dreieck gegeben mit den Eckpunkten $A(0, 0)$, $B(5, 0)$, $C(3, 3)$. Wie lang sind die Dreieckseiten?

1.2 Vektoren

Definition 1.2.1 Eine Strecke AB heißt orientiert, wenn man Anfangspunkt A und Endpunkt B unterscheidet. Unter der Länge einer orientierten Strecke versteht man den Abstand ihrer Randpunkte A , B gemäß Gl.(1.3) bzw. (1.4).

Definition 1.2.2 Die Menge aller orientierten Strecken, welche dieselbe Länge und dieselbe Richtung haben, heißt ein Vektor. Jedes Element dieser Menge heißt ein Repräsentant dieses Vektors. Unter der Länge (dem Betrag) eines Vektors versteht man die Länge eines beliebigen Repräsentanten. Ist diese Länge Null ($A = B$), dann heißt der Vektor der Nullvektor. Ist diese Länge 1, dann heißt dieser Vektor der Einheitsvektor.

Die Abb. 1.3 zeigt in \mathcal{E}_2 verschiedene Repräsentanten \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , \overrightarrow{LM} , ... eines Vektors. Wie es die Definition fordert, muß gelten

- (a) $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{LM} \dots$ Streckenlängen gleich
- (b) Die Verbindungsgeraden $a = AB$, $c = CD$ und $l = LM$ sind parallel.
- (c) Die auf a , c , l durch die Streckenanfangs- bzw. Streckenendpunkte definierten Orientierungen (Richtungssinne) sind gleich.

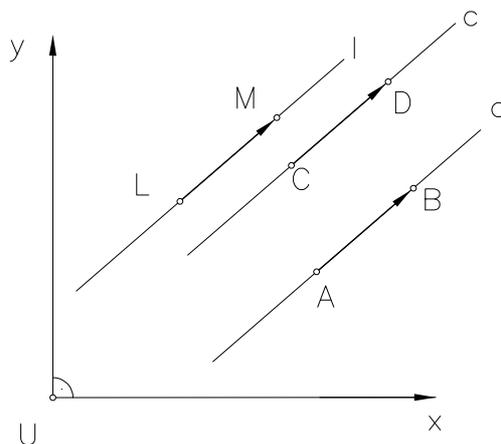


Abbildung 1.3: Parallelkoordinatensystem

Wir schreiben $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{LM}$ und verwenden zur Bezeichnung von Vektoren i.f. lateinische Buchstaben, die fett geschrieben sind: \mathbf{a} , \mathbf{b} , ...; \mathbf{o} = Nullvektor, \mathbf{e} = Einheitsvektor. Den Betrag von Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} , ... bezeichnen wir i. F. mit $|\mathbf{a}|$, $|\mathbf{b}|$, ...

Die oben definierten Vektoren heißen oft *freie Vektoren*. Darf ein Vektor nur längs einer Geraden g betrachtet werden, dann heißt er *linienflüchtig*. Vektoren mit dem festen Anfangspunkt U im Koordinatenursprung heißen *Ortsvektoren*.

Im folgenden entwickeln wir kurz die wichtigsten *Operationen mit Vektoren*, wobei Beweise i.a. weggelassen werden.

Addition von Vektoren, Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Definition 1.2.3 Gegeben 2 freie Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} . Der Summenvektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ ist jener Vektor, der vom Anfangspunkt von \mathbf{a} zum Endpunkt jenes Repräsentanten von \mathbf{b} zielt, welcher im Endpunkt von \mathbf{a} beginnt (Parallelogrammregel).

Rechenregel:

$$\begin{array}{ll}
 \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} & \dots \text{Kommutativgesetz} \\
 \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} & \dots \text{Assoziativgesetz} \\
 \mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{o} & \dots \text{Nullvektor}
 \end{array} \tag{1.5}$$

Definition 1.2.4 Ist \mathbf{a} ein Vektor und $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$, so ist $\lambda \mathbf{a}$ jener Vektor, der zu \mathbf{a} gleichsinnig parallel ist und dessen Betrag λ -mal so groß ist wie der Betrag von \mathbf{a} . Für $\lambda < 0$ ist $\lambda \mathbf{a}$ ungleichsinnig parallel zu \mathbf{a} und wie oben gilt $|\lambda \mathbf{a}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$. Der Vektor zu $\lambda = -1$ heißt der zu \mathbf{a} inverse Vektor $-\mathbf{a}$.

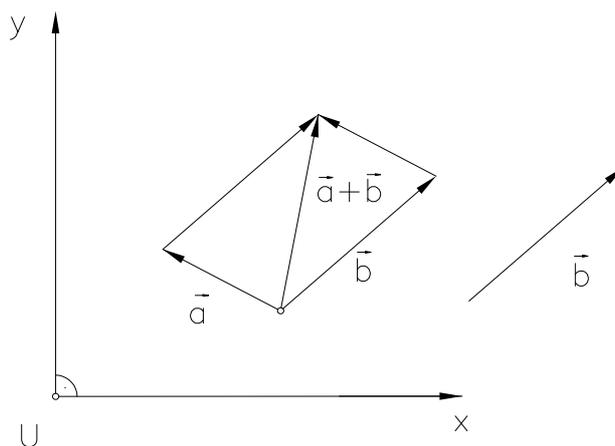


Abbildung 1.4: Parallelogrammregel zur Addition von Vektoren

Rechenregel:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \mathbf{o} \\
 \lambda(\mu\mathbf{a}) &= (\lambda\mu)\mathbf{a} && \dots \text{Assoziativgesetz} \\
 \lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} && \dots \text{Distributivgesetz I} \\
 (\lambda + \mu)\mathbf{a} &= \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a} && \dots \text{Distributivgesetz II} \\
 1 \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{a}.
 \end{aligned}
 \tag{1.6}$$

Koordinatendarstellung von Vektoren

Definition 1.2.5 Vektoren $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m\}$ eines Vektorraums \mathbf{V} heißen linear unabhängig (l.u.), wenn aus einer Linearkombination

$$\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m\mathbf{a}_m = \mathbf{o}
 \tag{1.7}$$

die den Nullvektor darstellt, stets folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ heißen linear abhängig (l.a.), wenn sie nicht linear unabhängig sind.

Wir bezeichnen i.f. die Vektoren $\overrightarrow{UE_1} = \mathbf{e}_1, \overrightarrow{UE_2} = \mathbf{e}_2, \overrightarrow{UE_3} = \mathbf{e}_3$ aus den Abbildungen 1 und 2 als Einheitsvektoren des Parallelkoordinatensystems.

Satz 1.2.1 Die Vektoren \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 in \mathcal{E}_2 sind linear unabhängig. Die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ in \mathcal{E}_3 sind linear unabhängig. Jeder Vektor \mathbf{x} aus \mathcal{E}_2 (\mathcal{E}_3) läßt sich in der Gestalt

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 \quad \text{bzw.}
 \tag{1.8}$$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3
 \tag{1.9}$$

darstellen, wobei x_1, x_2 bzw. x_1, x_2, x_3 eindeutig bestimmt sind.

Ist \mathbf{x} der Repräsentant eines Vektors durch U , so gilt $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$. Die Vektoren $x_1\mathbf{e}_1, x_2\mathbf{e}_2$ heißen die Komponenten des Vektors \mathbf{x} . Die Zahlen x_1, x_2 heißen die Koordinaten des Vektors \mathbf{x} .

Satz 1.2.2 Besitzen 2 Ortsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} bezüglich eines Parallelkoordinatensystems die Koordinaten $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ \mathbf{a} - \mathbf{b} &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \\ \lambda \mathbf{a} &= (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Satz 1.2.3 Bezeichnet A den Anfangs- und B den Endpunkt eines Vektors \overrightarrow{AB} und besitzen A bzw. B in einem Parallelkoordinatensystem die Koordinaten $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ so gilt

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) \tag{1.11}$$

d.h. man erhält die Koordinaten des Vektors \overrightarrow{AB} als Differenz der Koordinaten seines Endpunktes minus den Koordinaten seines Anfangspunktes.

Definition 1.2.6 Vektoren $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ in einem Vektorraum \mathbf{V} bilden eine Basis, wenn sie linear unabhängig sind und sich jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ in der Form $\mathbf{x} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$ darstellen läßt. Die Zahl n heißt die Dimension des Vektorraumes.

Beispiel 1.2.1 1. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ in E_2 bilden eine Basis. Der zugehörige Vektorraum \mathbf{V}_2 ist zweidimensional.

2. $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ in E_3 bilden eine Basis. Der zugehörige Vektorraum \mathbf{V}_3 ist dreidimensional.

Beispiel 1.2.2 Gegeben sind vier Kräfte $\mathbf{f}_i, i = 1, \dots, 4$ (symbolisiert durch vier Vektoren), die an einem Punkt A einer Ebene angreifen. Man ermittle rechnerisch und graphisch jene Kraft, die die vier gegebenen Kräfte im Gleichgewicht hält.

$$\mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_3 = \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{f}_4 = \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Lösung:

1. graphisch:

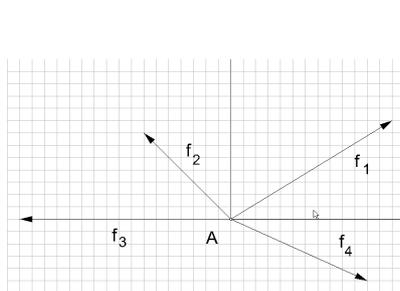


Abbildung 1.5: Gegebenes Kräftesystem

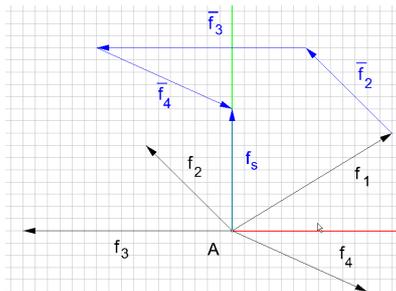


Abbildung 1.6: Summe der Einzelkräfte

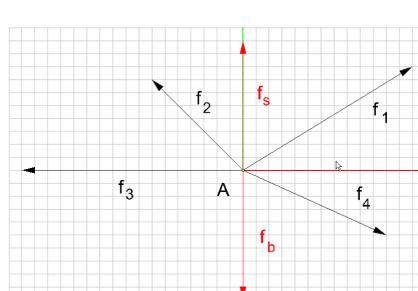


Abbildung 1.7: Gleichgewicht

2. rechnerisch: Ein Kräftesystem ist im Gleichgewicht, wenn $\sum \mathbf{f}_i = 0$ gilt. Im konkreten Fall gilt daher mit der gesuchten Kraft \mathbf{f}_b :

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix} + \mathbf{f}_b = 0 \Rightarrow$$

Die Summe der vier gegebenen Kräfte ist \mathbf{f}_s

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -17 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \mathbf{f}_s \Rightarrow \mathbf{f}_s + \mathbf{f}_b = 0 \Rightarrow \mathbf{f}_b = -\mathbf{f}_s = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Das innere Vektorprodukt:

Unter dem Winkel zweier Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mid \in \mathcal{E}_2$ oder \mathcal{E}_3 versteht man den Winkel φ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen zwei Repräsentanten mit gemeinsamen Anfangspunkt A (Abb.1.8).

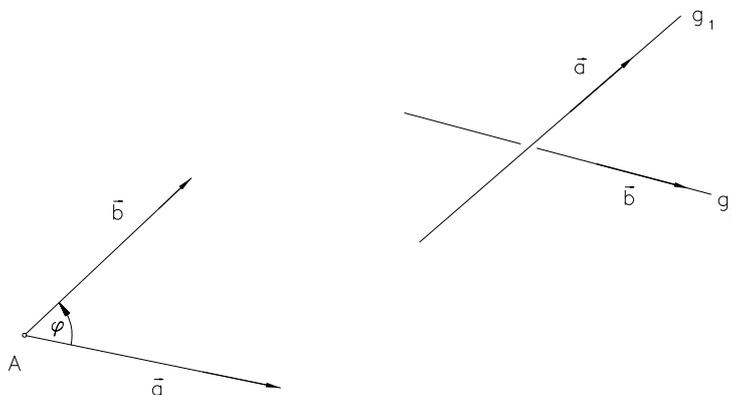


Abbildung 1.8: Winkel zwischen Vektoren

Man beachte, dass in \mathcal{E}_3 zwei Vektoren \mathbf{a}, \mathbf{b} auf nicht-schneidenden Geraden g_1, g_2 liegen können. Trotzdem ist ihr Winkel φ definiert. Es gilt $\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\sphericalangle(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.

Definition 1.2.7 Sind \mathbf{a}, \mathbf{b} Vektoren aus $\mathcal{E}_2(\mathcal{E}_3)$ und ist φ ihr Winkel, so versteht man unter dem inneren Vektorprodukt (Skalarprodukt) von \mathbf{a} und \mathbf{b} die Zahl

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= 0, \quad \text{falls } \mathbf{a} = \mathbf{o} \text{ oder } \mathbf{b} = \mathbf{o} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \quad \text{falls } \mathbf{a} \neq \mathbf{o}, \mathbf{b} \neq \mathbf{o}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Folgerungen:

1. Man beachte, dass das innere Vektorprodukt eine Zahl ist.
2. Stehen zwei Vektoren aufeinander normal (orthogonal), d.h. ist $\varphi = 90^\circ$, so folgt $\cos 90^\circ = 0$, d.h. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. Hiervon gilt auch die Umkehrung.
3. Ist $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \geq 0$, so bilden \mathbf{a} und \mathbf{b} einen Winkel φ mit $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$; für $90^\circ < \varphi \leq 180^\circ$ gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} < 0$.
4. Für $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ist $\varphi = 0$ und man findet $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}| = |\mathbf{a}|^2$, d.h. $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.
5. Es bezeichne b_a die Länge der Normalprojektion von \mathbf{b} auf \mathbf{a} (vgl. Abb.1.9), falls φ spitz ist. Dann gilt $b_a = |\mathbf{b}| \cos \varphi$. Damit gilt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| b_a$. Ist φ stumpf, dann setzen wir $b_a := -b_{-a}$ und es gilt auch hier $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| b_a$.

Wir fassen zusammen und ergänzen einiges im

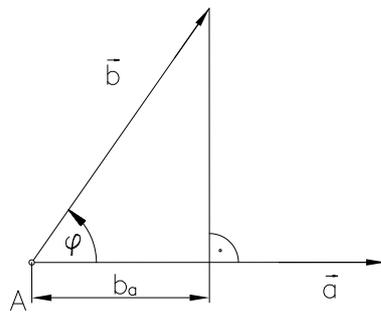


Abbildung 1.9: Inneres Produkt - Normalprojektion

Satz 1.2.4 Das innere Produkt von 2 Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \mid \neq \mathbf{o}$ verschwindet genau dann, wenn die Vektoren zueinander senkrecht sind. Es gilt

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| b_a \quad (1.14)$$

Weiters gelten folgende Rechenregeln.:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \quad (1.15)$$

Ein Assoziativgesetz gilt nicht.

Beispiel 1.2.3 Ein Satteldach ist über einem Traufenrechteck mit der Länge 20m und der Breite 12m mit gleicher Dachneigung gegeben. Der First liegt in der Höhe 3m über dem Traufenpolygon. Wie groß ist die Dachneigung? Wie groß ist die Neigung der Gratsparren? Wie hoch würde der Firstpunkt liegen wenn die Dachneigung 30° wäre?

Eine Basis $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ heißt eine *Orthonormalbasis*, wenn die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ paarweise *aufeinander senkrecht* stehen und die *Länge 1* besitzen. Besitzen \mathbf{a} und \mathbf{b} bezüglich einer Orthonormalbasis die Koordinaten $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dann gilt für ihr inneres Produkt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (1.16)$$

Für ihren Winkel φ gilt bezüglich dieser Orthonormalbasis

$$\cos \varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad (1.17)$$

Formel (1.17) folgt unmittelbar aus der Definition des inneren Produkts (1.12) und den Rechenregeln (1.15).

Bemerkungen:

1. Liegt in \mathcal{E}_2 oder \mathcal{E}_3 ein kartesisches Koordinatensystem vor, dann bilden die Basisvektoren ein Orthonormalsystem.
2. Die kanonische Basis $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, \dots, 0, 1)$ in \mathbb{R}^n ist ein Orthonormalsystem, wenn man in \mathbb{R}^n das innere Produkt formal gemäß (1.12) definiert.
3. Oft benützt man das KRONECKER-Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } i \neq j \\ 1 & , \text{ falls } i = j. \end{cases} \quad (1.18)$$

Dann gilt nach obigem für eine Orthonormalbasis

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}. \quad (1.19)$$

Beispiel 1.2.4 Gegeben sind die drei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 7 \end{pmatrix}$.

1. Man stelle die Vektoren in der Standardbasis $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dar.
2. Sind die drei Vektoren linear unabhängig?
3. Was bedeutet lineare Abhängigkeit der drei Vektoren geometrisch?
4. Man berechne das innere Produkt $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

Lösung:

1. In einer Basis muss jeder Vektor als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar sein. Die drei gegebenen Vektoren sind Elemente eines dreidimensionalen Vektorraumes in dem die gegebenen Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ linear unabhängig sind und daher eine Basis darstellen. Jeder weitere Vektor dieses Vektorraumes muss daher durch die Basisvektoren darstellbar sein:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 - 5\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -17 \\ 7 \end{pmatrix} = \mathbf{e}_1 - 17\mathbf{e}_2 + 7\mathbf{e}_3$$

2. Wenn diese drei Vektoren linear abhängig sind dann muss gelten:

$$\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} = \mathbf{c}$$

Schreibt man diese Vektorgleichung in Komponenten auf, so ergeben sich drei Gleichungen in den zwei Unbekannten λ und μ . Wenn lineare Abhängigkeit vorliegt, dann muss die dritte Gleichung mit den ersten beiden Gleichungen kompatibel sein.

$$\begin{aligned}\lambda + 2\mu &= 1 \\ -5\lambda + 2\mu &= -17 \\ 3\lambda + 2\mu &= 7\end{aligned}$$

Aus den ersten beiden Gleichungen errechnet man leicht $\lambda = 3$ und $\mu = -1$. Wenn lineare Abhängigkeit gegeben ist, muss nach Einsetzen dieser Werte in die dritte Gleichung eine Identität herauskommen. Dies ist tatsächlich der Fall:

$$3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) = 7$$

3. Geometrisch bedeutet diese lineare Abhängigkeit, dass die drei Vektoren in einer Ebene liegen.

4. Inneres Produkt:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 - 10 + 6 = -2$$

Das äußere Vektorprodukt:

Das äußere Vektorprodukt ist nur in \mathcal{E}_3 definiert und ordnet - anders als in Abschnitt 1.2 - jedem Vektorpaar \mathbf{a} , \mathbf{b} wieder einen Vektor zu. Dies geschieht gemäß der folgenden

Definition 1.2.8 Das äußere (vektorielle) Vektorprodukt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ aus \mathcal{E}_3 ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der Fläche des durch \mathbf{a} und \mathbf{b} bestimmten Parallelogrammes ist, auf die Ebene dieses Parallelogrammes senkrecht steht und so orientiert ist, dass \mathbf{a} , \mathbf{b} und $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden. Ist mindestens einer der Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} der Nullvektor, dann ist $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{o}$.

Anmerkungen und Folgerungen:

1. Drei Vektoren \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{c} bilden ein Rechtssystem (vgl. Abb. 11), wenn sie so aufeinander folgen, wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger der rechten Hand. Man kann dies auch so ausdrücken: \mathbf{c} zeigt in jene Richtung, in die eine *Rechtsschraube* vorrückt, wenn man ihr jene Drehung erteilt, die den Vektor \mathbf{a} in den Vektor \mathbf{b} überführt und zwar um dem *kleineren* der möglichen *Drehwinkel*.
2. Für den Flächeninhalt des von \mathbf{a} und \mathbf{b} aufgespannten Parallelogrammes (vgl. Abb.1.11) ergibt sich

$$F = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot |\sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})|. \quad (1.20)$$

3. Gilt in (1.20) $F = 0$, so folgt wegen $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, dass $\sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$ gilt. Dann sind aber \mathbf{a} und \mathbf{b} parallel bzw. antiparallel, d.h. sicher linear abhängig. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

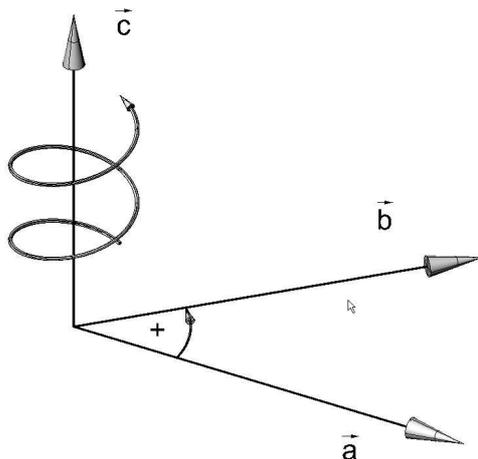


Abbildung 1.10: Äußeres Vektorprodukt - Rechtsschraubung

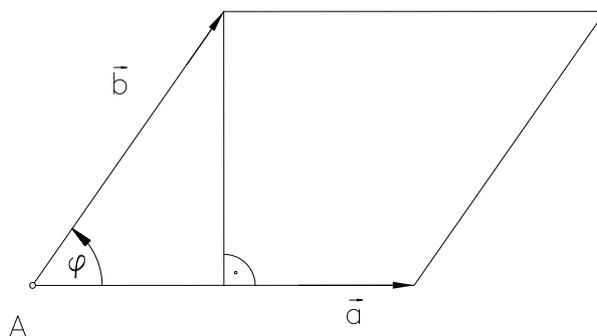


Abbildung 1.11: Parallelogramm

Wir fassen zusammen und ergänzen einiges in

Satz 1.2.5 *Das äußere Produkt von 2 Vektoren $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ verschwindet genau dann, wenn die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} linear abhängig sind. Weiters gelten folgende Rechenregeln*

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} && \dots \text{ Antikommutativgesetz} \\
 (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) && \dots \text{ Distributivgesetze} \\
 \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\
 (\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= \lambda (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}) && (1.21)
 \end{aligned}$$

Ein Assoziativgesetz gilt nicht.

Besitzen \mathbf{a} und \mathbf{b} bezüglich einer Orthonormalbasis die Koordinaten $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, dann besitzt der Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ die Koordinaten

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} a_2 & a_3 & a_3 & a_1 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_3 & b_3 & b_1 & b_1 & b_2 \end{array} \right) \quad (1.22)$$

nach der formalen Entwicklung gemäß der ersten Determinantenzeile

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad (1.23)$$

Beweis:

1. Um (1.21, erste Gleichung) einzusehen, ist nur zu beachten, dass die Beträge und Richtungen von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ übereinstimmen, dass aber die Orientierungen verschieden sind. Auf die Beweise der übrigen Gleichungen wird verzichtet
2. Für die Einheitsvektoren eines *orthonormierten Rechtssystems* (vgl. Abb.1.12) gilt ersichtlich wobei die letzten drei Gleichungen aus den ersten drei Gleichungen mittels (1.21)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 &= \mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 \\
 \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1 &= -\mathbf{e}_3 \\
 \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2 &= -\mathbf{e}_1 \\
 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3 &= -\mathbf{e}_2
 \end{aligned}
 \tag{1.24}$$

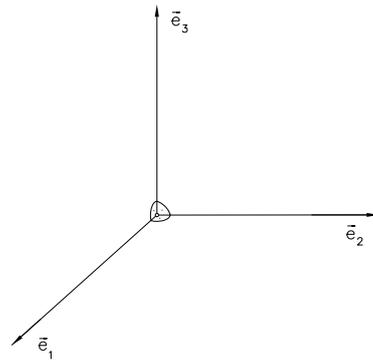


Abbildung 1.12: Kartesisches Koordinatensystem

folgen. Gilt in diesem Rechtssystem $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3$, so folgt mittels (1.21) und (1.23):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \times (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) = \\
 &= a_1 b_1 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1) + a_2 b_1 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_1) + a_3 b_1 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1) + a_1 b_2 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) + \\
 &\quad + a_2 b_2 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_2) + a_3 b_2 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_2) + a_1 b_3 (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3) + a_2 b_3 (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) + \\
 &\quad + a_3 b_3 (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \mathbf{e}_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \mathbf{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \mathbf{e}_3
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde benützt, dass $\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_j = \mathbf{o}$ gilt. Die Koordinaten von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ besitzen somit die in (1.22) angegebenen Determinatenwerte.

Entwickelt man (1.23) formal hinsichtlich der ersten Zeile, so liefert dies genau obige Darstellung von $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Beachte, dass es sich nur um eine *formale Entwicklung* handelt, denn in der ersten Zeile von (1.23) stehen ja keine Zahlen sondern Vektoren.

Beispiel 1.2.5 Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Man berechne ihren Normalvektor.

1.3 Matrizen

Definition 1.3.1 Eine Matrix \mathbf{A} der Ordnung $(m \times n)$ (kurz: eine $(m \times n)$ - Matrix) ist ein rechteckiges Schema aus mn Elementen der Form

$$\mathbf{A} = (\mathbf{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die horizontalen Reihen in \mathbf{A} heißen Zeilen oder Zeilenvektoren, die vertikalen Reihen in \mathbf{A} Spalten oder Spaltenvektoren.

Bemerkung 1.3.1 Matrizen werden im Folgenden mit fetten, großen lateinischen Buchstaben geschrieben ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$). Die Elemente einer Matrix können reelle Zahlen, aber auch z.B. Funktionen eines oder mehrerer Parameter sein.

Definition 1.3.2 Zwei Matrizen $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ heißen gleich, wenn sie die gleiche Ordnung besitzen und wenn $a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und für alle $j = 1, \dots, n$ gilt.

Beispiel 1.3.1 Von den Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} t & 2t^2 \\ 1 & 0 \\ t^3 & 1-t \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

sind nur \mathbf{A} und \mathbf{D} gleich.

Definition 1.3.3 Es seien $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ zwei $(m \times n)$ - Matrizen. Die Summe $\mathbf{A} + \mathbf{B} =: \mathbf{C} = (c_{ij})$ von \mathbf{A} und \mathbf{B} ist gegeben durch $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und für alle $j = 1, \dots, n$.

Beispiel 1.3.2 1. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & -8 \end{pmatrix} =$

2. $\begin{pmatrix} t^2 & 5 \\ 3t & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ t & -t \end{pmatrix} =$

Für die Matrizenaddition gelten folgende Rechenregeln:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad \dots \text{Kommutativgesetz} \quad (1.25)$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \quad \dots \text{Assoziativgesetz} \quad (1.26)$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A} \quad (1.27)$$

wobei $\mathbf{0}$ jene Matrix ist, deren Elemente alle Null sind (Nullmatrix).

Definition 1.3.4 Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$ - Matrix und es sei λ ein Skalar. Das Skalarprodukt $\lambda \mathbf{A} =: \mathbf{C} = (c_{ij})$ von λ und \mathbf{A} ist gegeben durch $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ für alle $i = 1, \dots, m$ und für alle $j = 1, \dots, n$.

Beispiel 1.3.3

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} =$$

Insbesondere erhält man für eine Matrix \mathbf{A} und $\lambda = -1$

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \cdots & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \\ -a_{m1} & \cdots & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix} = -\mathbf{A}$$

Für die *Skalarmultiplikation von Matrizen* gelten folgende *Rechenregeln*:

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{A} &= \mathbf{A} \lambda && \dots \text{Kommutativgesetz,} \\ \lambda_1(\lambda_2 \mathbf{A}) &= (\lambda_1 \lambda_2) \mathbf{A} && \dots \text{Assoziativgesetz,} \\ \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \lambda \mathbf{A} + \lambda \mathbf{B} && \dots \text{Distributivgesetz, I} \\ (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{A} &= \lambda_1 \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{A} && \dots \text{Distributivgesetz II.} \end{aligned} \tag{1.28}$$

Insbesondere gilt für $\lambda = 1$ und eine $(m \times n)$ -Matrix \mathbf{A}

$$1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = \mathbf{A}$$

Die Multiplikation von Matrizen ist die wichtigste Operation. Sie wird im folgenden Kapitel bei der Zusammensetzung von Transformationen benötigt.

Definition 1.3.5 *Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$ -Matrix und es sei $\mathbf{B} = (b_{ij})$ eine $(n \times p)$ -Matrix. Das Produkt $\mathbf{AB} =: \mathbf{C} = (c_{ij})$ von \mathbf{A} und \mathbf{B} ist eine $(m \times p)$ -Matrix, gegeben durch*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \tag{1.29}$$

Beispiel 1.3.4 1. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} =$

Für die *Matrizenmultiplikation* gelten folgende *Rechenregeln*:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{BC}) &= (\mathbf{AB})\mathbf{C} && \dots \text{Assoziativgesetz,} \\ \mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{AB} + \mathbf{AC} && \dots \text{Rechts - Distributivgesetz,} \\ (\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} &= \mathbf{AC} + \mathbf{BC} && \dots \text{Links - Distributivgesetz.} \end{aligned} \tag{1.30}$$

Im allgemeinen gilt jedoch $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (siehe das obige Beispiel (2) !).

Bemerkung 1.3.2 Es gibt von der Nullmatrix verschiedene Matrizen, deren Produkt die Nullmatrix ist. Solche Matrizen nennt man Nullteiler. Die Existenz von Nullteilern hat zur Folge, dass aus der Gleichung $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ im allgemeinen nicht $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ gefolgert werden kann.

Beispiel 1.3.5 1.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} =$$

2. Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{AC} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \text{ also wohl } \mathbf{AB} = \mathbf{AC}, \text{ jedoch } \mathbf{B} \neq \mathbf{C}.$$

1.4 Transponieren von Matrizen, spezielle Matrizen

Definition 1.4.1 Ist $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$ -Matrix, dann versteht man unter der transponierten Matrix \mathbf{A}^T (Transponierten) die Matrix mit den Elementen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= (a_{ji}) && (i = 1, \dots, m) \\ &&& (j = 1, \dots, n) \end{aligned} \tag{1.31}$$

Bemerkung: Man erhält somit \mathbf{A}^T , indem man in \mathbf{A} die Zeilen und Spalten vertauscht.

Beispiel 1.4.1 1. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T =$

2. $(a_1, a_2, \dots, a_n)^T =$

Dieses Beispiel zeigt, dass man durch Transponieren aus jedem Zeilenvektor einen Spaltenvektor machen kann und umgekehrt.

Für die *Matrizentransposition* gelten folgende *Rechenregeln*:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T &= \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \\ (\mathbf{AB})^T &= \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T \\ (\mathbf{A}^T)^T &= \mathbf{A}. \end{aligned} \tag{1.32}$$

(man achte auf die Reihenfolge der Faktoren!).

Beim Rechnen mit Matrizen ist es oft von Nutzen, spezielle Eigenschaften derselben zu kennen. Wir wollen deshalb einige spezielle Matrizen erwähnen.

Definition 1.4.2 Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine $(m \times n)$ -Matrix.

1. \mathbf{A} heißt *reelle Matrix*, wenn alle a_{ij} reell sind.

2. \mathbf{A} heißt quadratische Matrix, wenn $m = n$ ist.
3. \mathbf{A} heißt symmetrische Matrix, wenn \mathbf{A} reell und quadratisch ist und überdies $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gilt.
4. \mathbf{A} heißt schiefsymmetrische Matrix, wenn \mathbf{A} reell und quadratisch ist und überdies $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$ gilt.
5. \mathbf{A} heißt obere Dreiecksmatrix, wenn \mathbf{A} quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ ist für alle $i > j$.
6. \mathbf{A} heißt Diagonalmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ ist für alle $i \neq j$.
7. $\mathbf{A} = \mathbf{I}$ heißt Einheitsmatrix, wenn \mathbf{I} eine Diagonalmatrix ist, deren Hauptdiagonalelemente alle 1 sind.

Folgerungen:

1. Aus der Definition einer symmetrischen Matrix folgt $a_{ij} = a_{ji}$, sodass eine Matrix dieser Art die Gestalt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & & \vdots \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.33)$$

besitzt. Sie ist *spiegelbildlich zur Hauptdiagonale*.

2. Aus der Definition einer schiefsymmetrischen Matrix folgt $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow 2a_{ii} = 0 \Rightarrow a_{ii} = 0$, d. h. *alle Hauptdiagonalelemente sind 0*. Eine schiefsymmetrische Matrix hat die Gestalt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

Wichtig ist der folgende

Satz 1.4.1 Jede reelle quadratische Matrix \mathbf{A} läßt sich als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Matrix darstellen.

Beweis: Wir setzen $\mathbf{A} = \mathbf{R} + \mathbf{S}$ mit $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)$ und $\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)$. Ersichtlich ist \mathbf{R} symmetrisch, denn $\mathbf{R}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T + \mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T) = \mathbf{R}$, und \mathbf{S} schiefsymmetrisch, denn $\mathbf{S}^T = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T - \mathbf{A}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T) = -\mathbf{S}$.

Beispiel 1.4.2

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Determinanten

Im Folgenden wenden wir uns dem im Zusammenhang mit Matrizen wichtigen Begriff der Determinante zu. Der Begriff findet sich erstmals bei *Carl Friedrich GAUSS* (1801), verwendet wurde diese Matrizenfunktion allerdings bereits 1678 von *Gottfried Wilhelm LEIBNIZ*.

Definition 1.5.1

1. Es sei $\mathbf{A} = (a_{11})$. Unter der Determinante von \mathbf{A} verstehen wir den Skalar (die Zahl)

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} := a_{11}$$

2. Es sei $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Unter der Determinante von \mathbf{A} verstehen wir den Skalar

$$|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} := a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

3. Unter einer dreireihigen (dreizeiligen) Determinante versteht man eine Anordnung von neun Zahlen in einem quadratischen Zahlenschema, dem ein Zahlenwert zugeordnet ist.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - (a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1) \tag{1.35}$$

Der Wert der dreireihigen Determinante kann leicht nach der folgenden Anordnung berechnet werden:

$\rightarrow a_3 b_2 c_1$	
$\rightarrow b_3 c_2 a_1$	Produkte der Zahlen in den Nebendiagonalen
$\rightarrow c_3 a_2 b_1$	

$\rightarrow c_1 a_2 b_3$	
$\rightarrow b_1 c_2 a_3$	Produkte der Zahlen in den Hauptdiagonalen
$\rightarrow a_1 b_2 c_3$	

$$D = \underbrace{a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3}_{\text{Summe der Produkte in den Hauptdiagonalen}} - \underbrace{(a_3 b_2 c_1 + b_3 c_2 a_1 + c_3 a_2 b_1)}_{\text{minus Summe der Produkte in den Nebendiagonalen}}$$

Aufbauend auf Definition 1.5.1 werden wir induktiv den Begriff der Determinante einer beliebigen $(n \times n)$ -Matrix einführen; diese Vorgangsweise besitzt den Vorteil, überdies ein Verfahren zur Berechnung der Determinante zu liefern. Wir nehmen also zunächst an, die Determinante einer beliebigen $((n - 1) \times (n - 1))$ -Matrix sei bereits definiert. Vorerst eine wichtige *Begriffsbildung*.

Definition 1.5.2 Es sei \mathbf{A} eine $(m \times n)$ - Matrix und es sei $r \leq m$, $s \leq n$. Eine $(r \times s)$ - Untermatrix von \mathbf{A} ist eine $(r \times s)$ - Matrix, welche aus \mathbf{A} durch Streichung von $m - r$ Zeilen und $n - s$ Spalten hervorgeht.

Beispiel 1.5.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ist jene 2×2 Untermatrix von $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, welche durch Streichung der ersten Zeile und der zweiten Spalte entsteht.

Definition 1.5.3 Es sei \mathbf{A} eine $(n \times n)$ - Matrix und es sei \mathbf{A}_{ij} jene $((n - 1) \times (n - 1))$ - Untermatrix von \mathbf{A} , welche durch Streichung der i -ten Zeile und der j -ten Spalte von \mathbf{A} entsteht. Der (i, j) - Minor von \mathbf{A} ist dann gerade $\det \mathbf{A}_{ij}$.

Beispiel 1.5.2 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$ ist der $(1,2)$ - Minor von $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Definition 1.5.4 Es sei $\mathbf{A} = (a_{ij})$ eine $(n \times n)$ - Matrix. Der Kofaktor (die Adjunkte) des Elements a_{ij} ist das Produkt aus $(-1)^{i+j}$ und dem (i, j) - Minor von \mathbf{A} .

Beispiel 1.5.3 $(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3$ ist der Kofaktor von $a_{12} = 2$ in $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Um nun zur Determinante einer $(n \times n)$ - Matrix zu gelangen, geht man folgendermaßen vor:

- Wahl einer beliebigen Zeile oder Spalte.
- Bestimmung des Kofaktors zu jedem Element in der gewählten Zeile oder Spalte (die Bildung der Determinante von $((n - 1) \times (n - 1))$ - Matrizen ist ja als bereits bekannt angenommen worden).
- Multiplikation aller Elemente der gewählten Zeile oder Spalte mit ihrem Kofaktor.
- Summation aller so erhaltenen Produkte.

Bemerkung 1.5.1 Man sucht sich die Zeile oder Spalte zum Entwickeln aus, die am einfachsten ist (viele Nullen hat).

Beispiel 1.5.4 Die Entwicklung der Determinante von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

nach der zweiten Spalte liefert
 $\det \mathbf{A} =$

$$\begin{aligned} &= 0 \cdot (-1)^{1+2} | \mathbf{A}_{12} | + 4(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+2} | \mathbf{A}_{32} | + 1(-1)^{4+2} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \left\{ 1(-1)^{1+1} \cdot 11 + 5(-1)^{1+2} \cdot 11 + 2(-1)^{1+3} \cdot 11 \right\} + 1 \left\{ 2(-1)^{1+3}(-7) + \right. \\ & \left. 0(-1)^{2+3}(-11) + 1(-1)^{3+3} \cdot 6 \right\} = 4(-22) + (-8) = -96. \end{aligned}$$

Wichtige Determinanteneigenschaften:

Es sei \mathbf{A} eine $(n \times n)$ - Matrix.

- (a) Besitzt eine Zeile (Spalte) von \mathbf{A} lauter Nullen, dann ist $\det \mathbf{A} = 0$.
- (b) Werden zwei Zeilen (Spalten) von \mathbf{A} vertauscht, dann ändert $\det \mathbf{A}$ das Vorzeichen.
- (c) Sind zwei Zeilen (Spalten) von \mathbf{A} gleich, dann ist $\det \mathbf{A} = 0$.
- (d) Erhält man \mathbf{B} aus \mathbf{A} durch Multiplikation einer Zeile (Spalte) von \mathbf{A} mit einem Skalar λ , dann ist $\det \mathbf{B} = \lambda \det \mathbf{A}$.
- (e) Für jeden Skalar λ gilt $\det (\lambda \mathbf{A}) = \lambda^n \det \mathbf{A}$.
- (f) Erhält man \mathbf{B} aus \mathbf{A} , indem man zu einer Zeile (Spalte) von \mathbf{A} das Vielfache einer anderen Zeile (Spalte) von \mathbf{A} addiert, dann ist $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}$.
- (g) $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.
- (h) Ist \mathbf{B} eine $(n \times n)$ - Matrix, dann gilt $\det (\mathbf{A}\mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.
- (i) Die Determinante von Diagonalmatrizen und Dreiecksmatrizen ist stets das Produkt der Hauptdiagonalelemente.

Diese Eigenschaften ermöglichen in vielen Fällen eine rasche Berechnung von Determinanten.

Beispiel 1.5.5

$$\begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ -10 & 9 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -6 & -9 \\ 6 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & -6 & -3 \\ 6 & -5 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} = 6.$$

Auf eine Herleitung aller Eigenschaften (a) – (i) einer Determinante können wir hier nicht eingehen.

Eine wichtige geometrische Interpretation der Determinante ist das Volumen eines Spats. Ein Spat (Parallelepiped) ist der von drei Ortsvektoren erzeugte Körper mit paarweise kongruenten Parallelogrammen als Seitenflächen.

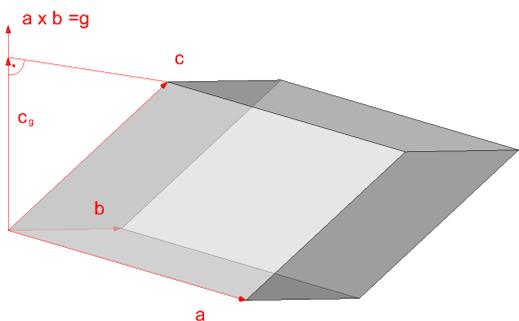


Abbildung 1.13: Spat(Parallelepiped)

Wir vermerken, dass das Volumen des Spats gleich der Grundfläche mal der Höhe ist. Die Grundfläche ist $|\mathbf{g}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Weiter gilt: $|\mathbf{g} \cdot \mathbf{c}| = |\mathbf{g}| \cdot |\mathbf{c}| \cos \angle(\mathbf{g}, \mathbf{c}) = |\mathbf{g}| \cdot |\mathbf{c}_g|$ ist gleich dem Produkt aus dem Beträgen von \mathbf{g} und der Projektion des Vektors \mathbf{c} auf \mathbf{g} . Damit ist aber $|\mathbf{g}| \cdot |\mathbf{c}_g| = |\mathbf{g} \cdot \mathbf{c}| = |(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}| = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Das letzte Gleichheitszeichen zeigt man durch direktes Ausrechnen und Vergleich mit Definition 1.5.1.

Beispiel 1.5.6 Gegeben seien die Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Man berechne das Volumen des von ihnen aufgespannten Spats.

$V =$

Kapitel 2

Projektionen, Transformationen und Bewegungen

2.1 Projektive Erweiterung der euklidischen Ebene und des euklidischen Raumes

Für viele Anwendungen ist das Arbeiten in der euklidischen Ebene \mathcal{E}_2 , bezogen auf kartesische Koordinaten $\{x, y\}$ nicht ausreichend (vgl. Abb.2.1). Eine Erweiterung des Koordinatenbegriffs und damit eine Erweiterung von \mathcal{E}_2 ist notwendig. Dies wird im Folgenden durchgeführt.

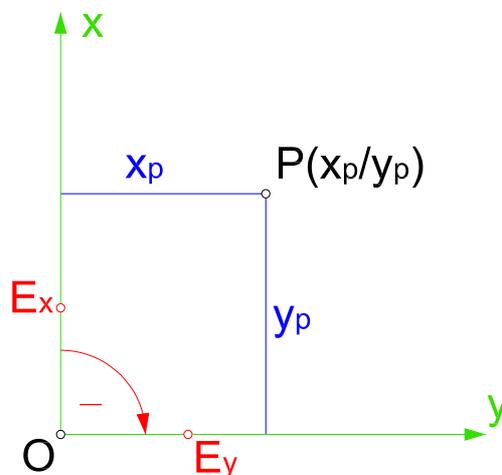


Abbildung 2.1: Kartesisches Koordinatensystem in der Ebene

Aus der Elementargeometrie ist wohlbekannt, wie man nach Zugrundelegung eines kartesischen Koordinatensystems $\{O; x, y\}$ jeden Punkt $X \in \mathcal{E}_2$ durch kartesische Koordinaten $\{x, y\}$ beschreiben kann. Umgekehrt legt jedes Zahlenpaar (x, y) bezüglich $\{O; x, y\}$ eindeutig einen Punkt $X \in \mathcal{E}_2$ fest.

Sei nun Q ein weiterer Punkt auf der Verbindungsgeraden OP , dann kann Q nach dem Strahlensatz durch $Q(\mu x, \mu y)$ beschrieben werden; umgekehrt stellt $(\mu x, \mu y)$ bei festem $X \neq O$ für ein bestimmtes μ einen Punkt Q auf OX dar. Wollen wir den Fernpunkt von OX ins Spiel bringen (natürlich rein heuristisch), dann ist der Grenzübergang $\mu \rightarrow \pm\infty$ durchzuführen. Dies liefert das sinnlose Paar (∞, ∞) . Wir wollen im Folgenden durch einen Kunstgriff diesen Grenzübergang möglich machen:

1. Ist $X = (x, y) \in \mathcal{E}_2$ und (x_0, x_1, x_2) ein geordnetes Tripel mit $x_0 \neq 0$, dann soll dieses Tripel genau dann dem Punkt X zugewiesen werden, wenn gilt:

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad , \quad y = \frac{x_2}{x_0} \tag{2.1}$$

Dann ist $(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2)$ mit $\lambda \neq 0$ demselben Punkt X zugewiesen, denn $\frac{\lambda x_1}{\lambda x_0} = \frac{x_1}{x_0} = x$, $\frac{\lambda x_2}{\lambda x_0} = y$. Sind umgekehrt zwei Zahlentripel $(x_0, x_1, x_2), (x'_0, x'_1, x'_2)$ mit $x_0, x'_0 \neq 0$ demselben Punkt X zugewiesen, dann existiert stets ein $\lambda \neq 0$ so, dass $x'_i = \lambda x_i$ ($i = 0, 1, 2$). Denn aus $\frac{x'_i}{x'_0} = \frac{x_i}{x_0}$ ($i = 1, 2$) $\Rightarrow x'_i = \frac{x'_0}{x_0} x_i$. Wird $\frac{x'_0}{x_0} = \lambda$ gesetzt, dann ist $\lambda \neq 0$ und man erhält $x'_i = \lambda x_i$ ($i = 0, 1, 2$).

Es gilt also: Jedem Punkt $X \in \mathcal{E}_2$ ist umkehrbar eindeutig ein Zahlentripel $(x_0 : x_1 : x_2)$ mit $x_0 \neq 0$ zugeordnet. Die Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2)$ heißen *homogene Koordinaten*. x_0 heißt *homogenisierende Koordinate*.

2. Für die Koordinaten $(\mu x, \mu y)$ ($\mu \neq 0$) von Q gilt also:

$$(\mu x, \mu y) = (x_0 : \mu x_1 : \mu x_2) = \left(\frac{x_0}{\mu} : x_1 : x_2 \right)$$

Führt man jetzt auf der rechten Seite den Grenzübergang $\mu \rightarrow \pm\infty$ durch, so ergibt sich $(0 : x_1 : x_2)$. Diesem Tripel entspricht kein Punkt der Geraden OX in \mathcal{E}_2 , aber es ist naheliegend rein formal auch dieses Tripel zuzulassen und die Sprechweise einzuführen: $(0 : x_1 : x_2)$ beschreibt den *Fernpunkt (uneigentlichen Punkt)* auf OX . Da man zum selben Tripel gelangt, egal ob $\mu \rightarrow +\infty$ oder $\mu \rightarrow -\infty$ strebt, so ist hierdurch der Geraden OX in \mathcal{E}_2 , ein *einzigiger Fernpunkt* zugewiesen worden. Die Gerade, erweitert durch einen einzigen Fernpunkt, heißt *projektive Gerade*.

3. Das Tripel $(0 : 0 : 0)$ beschreibt weder einen eigentlichen noch einen uneigentlichen Punkt auf OX . Wegen $x_0 = 0$ beschreibt nämlich $(0 : 0 : 0)$ keinen eigentlichen Punkt auf OX ; $(0 : x : y) = (0 : 0 : 0)$ ist aber auch kein uneigentlicher Punkt, sonst wäre $X = O$ im Widerspruch zur Konstruktion von OX . Das *triviale* Tripel $(0 : 0 : 0)$ ist also in Hinkunft auszuscheiden.
4. Wird obige Erweiterung für alle Geraden der Ebene \mathcal{E}_2 durchgeführt, so ist die Gesamtheit der auftretenden Fernpunkte durch $x_0 = 0$ gekennzeichnet. Die durch Hinzunahme der Fernpunkte ihrer Geraden erweiterte euklidische Ebene heißt *projektive Ebene \mathcal{P}_2* . $x_0 = 0$ ist eine lineare Gleichung. Dies legt die Sprechweise nahe: Alle Fernpunkte einer projektiven Ebene liegen auf der *Ferngeraden* der Ebene.
5. Zwei parallele Geraden schneiden sich in einem Fernpunkt. Das, was zwei parallele Geraden gemeinsam haben, nennt man ihre *Richtung*. Hiermit erhält man: Jeder Richtung $\overrightarrow{OX} = (x, y)$ der Ebene entspricht ein Fernpunkt $(0 : x : y)$ dieser Ebene.

Völlig analoge Überlegungen kann man für den dreidimensionalen euklidischen Raum E_3 (Anschauungsraum) durchführen. Wir beziehen diesen Raum auf ein *kartesisches Koordinatensystem* $\{O; x, y, z\}$ mit dem Ursprung O und den Achsen x, y, z (vgl. Abbildung 2.2). Die Achsen stehen *paarweise aufeinander orthogonal* (normal).

An der Abbildung 2.2 kann man nun eine analoge Überlegung anstellen wie an der Abbildung 2.1. Ein Punkt $Q \in g = OX$ hat die Koordinaten $Q(\mu x, \mu y, \mu z)$ mit $\mu \in \mathbb{R}$. Für $\mu \rightarrow \pm\infty$ erhält man den *Fernpunkt G_u* , der sich koordinatenmäßig so nicht beschreiben läßt.

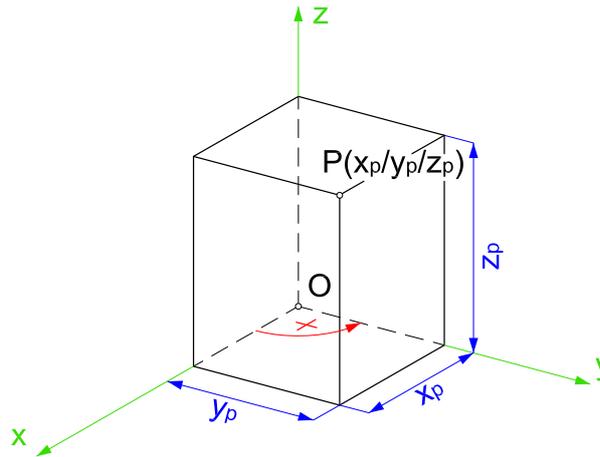


Abbildung 2.2: Kartesisches Koordinatensystem im Raum

Definition 2.1.1 Die projektiven (homogenen) Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ des Punktes $X \in E_3$ werden definiert durch

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0}; \quad x_0 \neq 0. \tag{2.2}$$

x_0 heißt homogenisierende Koordinate. Für $x_0 = 1$ erhält man wieder die kartesischen Koordinaten x, y, z .

1. Jedem Punkt $X \in \mathcal{E}_3$ ist umkehrbar eindeutig ein Quadrupel $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ mit $x_0 \neq 0$ zugeordnet.
2. Es ist $Q(\mu x, \mu y, \mu z) = Q(x_0 : \mu x_1 : \mu x_2 : \mu x_3) = Q(\frac{x_0}{\mu} : x_1 : x_2 : x_3)$ und man findet $\lim_{\mu \rightarrow \pm\infty} Q(\frac{x_0}{\mu} : x_1 : x_2 : x_3) = G_u(0 : x_1 : x_2 : x_3)$. Damit ist es gelungen den Fernpunkt G_u von g koordinatenmäßig zu beschreiben. Wird g durch den Fernpunkt G_u erweitert, so erhält man die projektive Gerade g^0 .
3. $(0 : 0 : 0 : 0)$ beschreibt keinen Punkt.
4. Der euklidische Raum \mathcal{E}_3 , erweitert durch die Fernpunkte aller Geraden von \mathcal{E}_3 , heißt projektiver Raum \mathcal{P}_3 .
5. Alle parallelen Geraden in \mathcal{E}_3 besitzen denselben Fernpunkt, d.h. dieselbe Richtung. Jeder Richtung, festgelegt durch einen Vektor $\vec{OX} = \{x, y, z\}$ entspricht ein Fernpunkt $(0 : x : y : z)$.
6. Die Menge der Fernpunkte in \mathcal{E}_2 oder \mathcal{E}_3 ist durch $x_0 = 0$, d.h. eine lineare Gleichung festgelegt. Da eine lineare Gleichung in \mathcal{E}_2 (\mathcal{E}_3) eine Gerade (Ebene) bestimmt, definiert man: Die Menge der Fernpunkte von \mathcal{E}_2 (\mathcal{E}_3) bestimmen die Ferngerade (Fernebene) von \mathcal{E}_2 (\mathcal{E}_3).

Satz 2.1.1 Bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems ist jedem Punkt der euklidischen Ebene bzw. des euklidischen Raumes ein homogenes Tripel $(x_0 : x_1 : x_2)$ bzw. ein homogenes Quadrupel $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ mit $x_0 \neq 0$ zugewiesen. Ein nichttriviales Tripel (Quadrupel) mit $x_0 = 0$ heißt ein Fernpunkt der Ebene (des Raumes) und legt eine Richtung fest. Zwei eigentliche oder uneigentliche Punkte sind gleich, wenn ihre homogenen Koordinaten proportional sind.

Ganz ähnlich wie man einem Punkt X in \mathcal{E}_3 die homogenen Koordinaten $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ zuordnet, so kann man auch einer Ebene Koordinaten zuordnen. Um dies abzuleiten gehen wir von der Gleichung einer Ebene in Vektorform aus. Eine Ebene in \mathcal{E}_3 ist bestimmt, wenn man 3 Punkte A, B, C von ihr kennt. Die zu den Punkten A, B, C führenden Ortsvektoren seien $\vec{OA} = \mathbf{a}$, $\vec{OB} = \mathbf{b}$, $\vec{OC} = \mathbf{c}$ (Abb. 2.3).

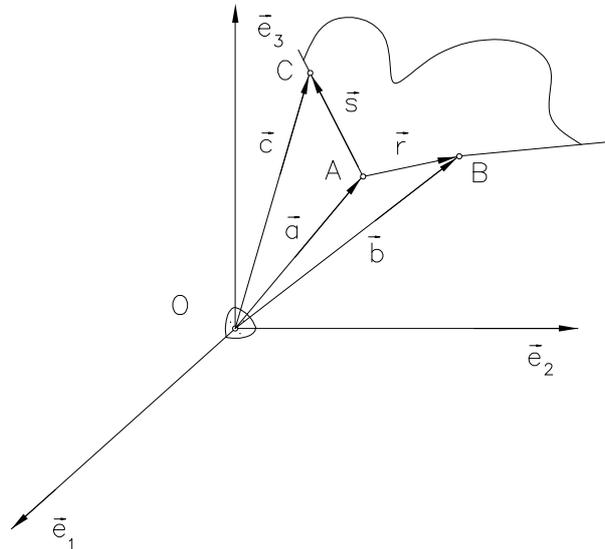


Abbildung 2.3: Ebenengleichung

Dann erhält man die Ebenengleichung der Verbindungsebene $\varepsilon = (A, B, C)$

$$\varepsilon : \mathbf{x} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \mathbf{a} + \lambda \mathbf{r} + \mu \mathbf{s}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad (2.3)$$

Die Parameter λ, μ kann man eliminieren durch skalare (innere) Multiplikation mit dem Vektor $\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{s}$

$$\mathbf{n}^T \mathbf{x} = \mathbf{n}^T (\mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b} - \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{c} - \mathbf{a})) = \mathbf{n}^T \mathbf{a}$$

wegen $\mathbf{n}^T \mathbf{r} = \mathbf{n}^T \mathbf{s} = 0$. Damit erhalten wir

$$\mathbf{n}^T \mathbf{x} - \mathbf{n}^T \mathbf{a} = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0 \quad (2.4)$$

Der Vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ ist ein Normalvektor der Ebene ε und $n_0 = -\mathbf{n}^T \mathbf{a} = \det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Wir bezeichnen $(n_0 : n_1 : n_2 : n_3)$ als die homogenen Koordinaten der Ebene ε .

Damit haben wir jetzt das Rüstzeug um die für das CAD und die Darstellende Geometrie (Darstellungsmethoden) so wichtigen Projektionen aus dem 3-dim Raum auf eine Bildebene (Zeichenblatt, Computerbildschirm) herzuleiten.

2.2 Projektionen

Gegeben sei eine Bildebene π durch die homogenen Koordinaten $(u_0 : u_1 : u_2 : u_3)$ und ein Projektionszentrum $Z(z_0 : z_1 : z_2 : z_3)$. Es soll gelten $u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 \neq 0$ (diese Bedingung verhindert, dass das Projektionszentrum in der Bildebene liegt!) und $\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = 1$. Für die Projektion $\varphi : \mathcal{E}_3 \rightarrow \pi$ haben wir nun folgenden Fälle zu betrachten:

1. $z_0 \neq 0$, **Zentralprojektion**, wir können setzen $Z(1 : z_1 : z_2 : z_3)$.
2. $z_0 = 0$, **Parallelprojektion** mit der Projektionsrichtung $\mathbf{r} = -\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3)^T$
3. **Normalprojektion** $\mathbf{z} = \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$.

Um das Folgende übersichtlich gestalten zu können werden wir die vier homogenen Koordinaten von Bildebene und Projektionszentrum zu einem Vierervektor zusammenfassen und schreiben $\underline{\mathbf{u}} = (u_0, u_1, u_2, u_3)$ usw.

Jede Projektionsgerade p_X durch X (Verbindungsgerade des Punktes mit dem Zentrum) läßt sich darstellen

$$\underline{\mathbf{y}} = t_0 \underline{\mathbf{z}} + t_1 \underline{\mathbf{x}}$$

Für ihren Schnittpunkt mit der Bildebene gilt $X^\varphi = \underline{\mathbf{x}}^\varphi = s_0 \underline{\mathbf{z}} + s_1 \underline{\mathbf{x}}$. Und aus $\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{x}}^\varphi = 0$ folgt durch Einsetzen

$$\begin{aligned} s_0 \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{z}} + s_1 \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{x}} &= 0 \Rightarrow \\ s_0 : s_1 &= -\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{x}} : \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{z}} \Rightarrow \\ \underline{\mathbf{x}}^\varphi &= -(\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{x}}) \underline{\mathbf{z}} + (\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{z}}) \underline{\mathbf{x}} \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich nach dem Ausmultiplizieren als Matrixgleichung schreiben

$$\underline{\mathbf{x}}^\varphi = \mathbf{P} \underline{\mathbf{x}}$$

mit

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 & -u_1 z_0 & -u_2 z_0 & -u_3 z_0 \\ -u_0 z_1 & u_0 z_0 + u_2 z_2 + u_3 z_3 & -u_2 z_1 & -u_3 z_1 \\ -u_0 z_2 & -u_1 z_2 & u_1 z_1 + u_0 z_0 + u_3 z_3 & -u_3 z_2 \\ -u_0 z_3 & -u_1 z_3 & -u_2 z_3 & u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_0 z_0 \end{bmatrix}$$

\mathbf{P} heißt Projektionsmatrix. Sie vermittelt die Projektion aus dem Zentrum Z auf die Bildebene π . Da die Bildebene im Koordinatensystem $\Sigma (U, x, y, z)$ noch ganz allgemein liegt, ist noch eine Koordinatentransformation durchzuführen, die eine Koordinatenebene mit der Bildebene (Bildkoordinatensystem) $\Sigma_B (O, y_1, y_2)$ zur Deckung bringt. Wir vereinbaren dazu:

- Der Ursprung des Bildkoordinatensystems soll im Bildpunkt des Ursprung des räumlichen Koordinatensystems liegen
- das Bild der z -Achse soll mit der y_2 -Achse des Bildkoordinatensystems übereinstimmen

Diese Koordinatentransformation wird durch

$$\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{T} \underline{\mathbf{y}}$$

mit der Matrix $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{t} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$ und $\mathbf{D} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3)$. Die Einträge in der Matrix beschreiben: \mathbf{t} stellt den Ursprung O des Bildkoordinatensystems im Raumkoordinatensystem Σ dar. Die Spalten sind die Richtungen der Achsen y_i des Bildkoordinatensystems in Σ gemessen. Da wir aber nicht die Koordinaten in Σ berechnen wollen, sondern in Σ_B benötigen wir die inverse Transformation \mathbf{T}^{-1} und erhalten zusammen mit der Projektionsmatrix \mathbf{P} :

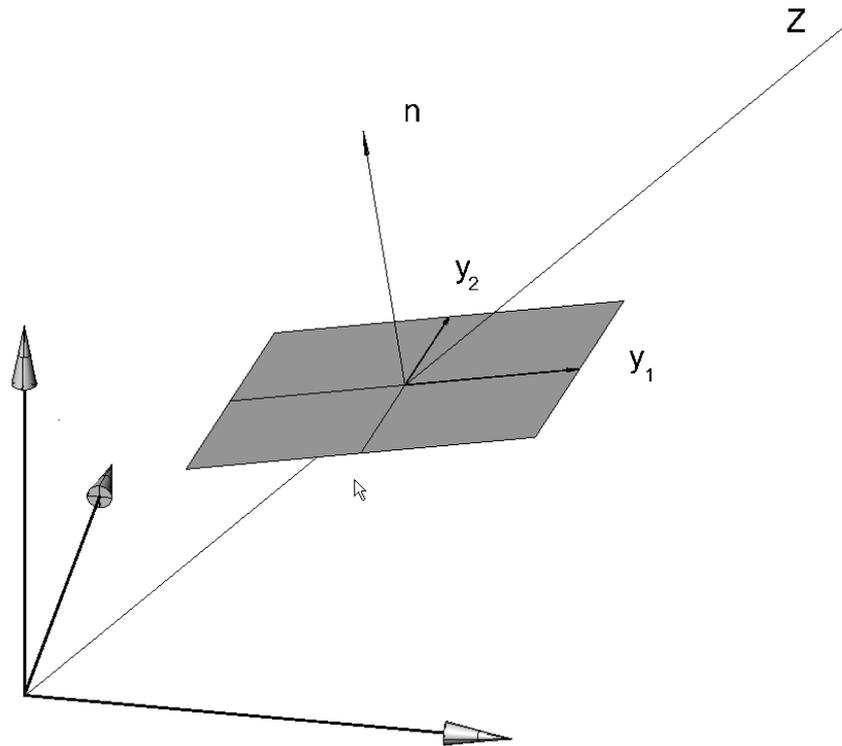


Abbildung 2.4: Bildkoordinatensystem

$$\underline{y}^\varphi = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P} \underline{x}, \quad \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{D}^T \mathbf{t} & \mathbf{D}^T \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{M} := \mathbf{T}^{-1} \mathbf{P}$$

Die Einträge der Matrix \mathbf{T} können nun wie folgt berechnet werden:

1. Da das Bildkoordinatensystem in der Projektionsebene liegt gilt: $y_3 = \mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$
2. Zur Berechnung von \mathbf{t}_2 muss die Forderung nach der Richtung der Projektion der z-Achse parallel zum linken Bildrand erfüllt werden. Dies erfordert eine Fallunterscheidung
 - wenn gilt $z_1 = z_2 = 0$, dann definieren wir einen Vektor $\mathbf{v} := (0, u_3 z_3, -u_2 z_3)^T$ sonst $\mathbf{v} := (-u_3 z_1, u_3 z_2, u_0 z_0 + u_1 z_1 + u_2 z_2)^T$
 - wenn $u_3 z_0 = 0$ dann ist $\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ sonst:
 - wir definieren $\mathbf{v}' := \frac{u_0}{-\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{z}}} \underline{\mathbf{z}} - \frac{1}{u_3 z_0} \underline{\mathbf{v}}$ und $\mathbf{t}_2 = \frac{\mathbf{v}'}{|\mathbf{v}'|}$
3. $\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \times \mathbf{t}_3$
4. $\mathbf{t} = \frac{u_0}{-\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{z}}} \underline{\mathbf{z}}, (O = U^\varphi).$

Mit diesem Algorithmus kann nun die Matrix der Transformation in das Bildkoordinatensystem beschrieben werden:

$$\mathbf{T}^{-1} := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^T \\ -\mathbf{t}_1^T \mathbf{t} & \mathbf{t}_1^T \\ -\mathbf{t}_2^T \mathbf{t} & \mathbf{t}_2^T \\ -\mathbf{t}_3^T \mathbf{t} & \mathbf{t}_3^T \end{pmatrix}$$

Damit können sämtliche Projektionen aus dem dreidimensionalen Raum auf eine zweidimensionale Bildebene beschrieben werden. Für die konkrete Berechnung verschiedener Projektionen wird auf die Maple-Notebooks Projektionsmatrix1-3, die von der homepage des Institutes heruntergeladen werden können. Wir zeigen hier eines der Notebooks:

```
> restart;with(linalg):with(plots):

Allgemeiner Fall Dreipunktperspektive (Horizont waagrecht u1:u2=z1:z2)
> Z:=vector([z0,z1,z2,z3]);
      Z := [z0, z1, z2, z3]
> Eb:=vector([u0,u1,u2,u3]);
      Eb := [u0, u1, u2, u3]
> X:=vector([x0,x1,x2,x3]);
      X := [x0, x1, x2, x3]
> P:=matrix(4,4,[u1*z1+u2*z2+u3*z3,-u1*z0,-u2*z0,-u3*z0,-u0*z1,u0*z0+u2
> *z2+u3*z3,-u2*z1,-u3*z1,-u0*z2,-u1*z2,u1*z1+u0*z0+u3*z3,-u3*z2,-u0*z3,
> -u1*z3,-u2*z3,u1*z1+u2*z2+u0*z0]);
      P := 
$$\begin{bmatrix} u1 z1 + u2 z2 + u3 z3, & -u1 z0, & -u2 z0, & -u3 z0 \\ -u0 z1, & u0 z0 + u2 z2 + u3 z3, & -u2 z1, & -u3 z1 \\ -u0 z2, & -u1 z2, & u1 z1 + u0 z0 + u3 z3, & -u3 z2 \\ -u0 z3, & -u1 z3, & -u2 z3, & u1 z1 + u2 z2 + u0 z0 \end{bmatrix}$$

> rank(P);det(P);
      3
      0

Berechnung der beiden Transformationsmatrizen, die die Bildtrafo
bringen (auf das Koordinatensystem der Zeichenebene bzw. des
Computerbildschirmes).
> t[3]:=vector([u1,u2,u3]);
      t3 := [u1, u2, u3]
> nt3:=sqrt(u1^2+u2^2+u3^2);
      nt3 :=  $\sqrt{u1^2 + u2^2 + u3^2}$ 
> tn[3]:=evalm(t[3]*1/nt3);
      tn3 := 
$$\left[ \frac{u1}{\sqrt{u1^2 + u2^2 + u3^2}}, \frac{u2}{\sqrt{u1^2 + u2^2 + u3^2}}, \frac{u3}{\sqrt{u1^2 + u2^2 + u3^2}} \right]$$

> vw:=col(P,4);
      vw := [-u3 z0, -u3 z1, -u3 z2, u1 z1 + u2 z2 + u0 z0]
> v:=vector([vw[2],vw[3],vw[4]]);
      v := [-u3 z1, -u3 z2, u1 z1 + u2 z2 + u0 z0]
> uTz:=evalm(transpose(Eb)&*Z);
      uTz := u0 z0 + u1 z1 + u2 z2 + u3 z3
> t:=scalarmul(-vector([Z[2],Z[3],Z[4]]),u0/(u1*z1+u2*z2+u3*z3));
      t := 
$$\left[ -\frac{u0 z1}{u1 z1 + u2 z2 + u3 z3}, -\frac{u0 z2}{u1 z1 + u2 z2 + u3 z3}, -\frac{u0 z3}{u1 z1 + u2 z2 + u3 z3} \right]$$

> vs:=evalm(scalarmul(-v,1/(u3*z0))-t);
```

$$vs := \left[\frac{z1}{z0} + \frac{u0 z1}{u1 z1 + u2 z2 + u3 z3}, \frac{z2}{z0} + \frac{u0 z2}{u1 z1 + u2 z2 + u3 z3}, \frac{-u1 z1 - u2 z2 - u0 z0}{u3 z0} + \frac{u0 z3}{u1 z1 + u2 z2 + u3 z3} \right]$$

- ```

> tn[2]:=map(simplify,evalm(vs*1/(sqrt(vs[1]^2+vs[2]^2+vs[3]^2)))):
> tn[1]:=map(simplify,crossprod(tn[2],tn[3])):
> TI:=matrix(4,4,[1,0,0,0,evalm(-transpose(tn[1])&*t),tn[1][1],tn[1][2],
> ,tn[1][3],evalm(-transpose(tn[2])&*t),tn[2][1],tn[2][2],tn[2][3],evalm
> (-transpose(tn[3])&*t),tn[3][1],tn[3][2],tn[3][3]]):
> map(simplify,TI):
> M:=map(simplify,evalm(TI&*P)):

```

Beispiel:

- ```

> u0:=-5;u1:=3;u2:=-2;u3:=-2;z0:=1;z1:=3;z2:=-2;z3:=1;
      u0 := -5
      u1 := 3
      u2 := -2
      u3 := -2
      z0 := 1
      z1 := 3
      z2 := -2
      z3 := 1
> M:=map(simplify,evalm(TI&*P)):MB:=map(simplify,op(M)):

```

Wir berechnen und plotten das Bild des Einheitswürfels (A,B,D,C,E,F,G,H)

- ```

> A:=vector([1,1,1,0]);B:=vector([1,-1,1,0]);C:=vector([1,-1,-1,0]);Dd:
> =vector([1,1,-1,0]);E:=vector([1,1,1,2]);F:=vector([1,-1,1,2]);G:=vect
> or([1,-1,-1,2]);H:=vector([1,1,-1,2]);Fx:=vector([0,1,0,0]);Fy:=vector
> ([0,0,1,0]);Fz:=vector([0,0,0,1]);
 A := [1, 1, 1, 0]
 B := [1, -1, 1, 0]
 C := [1, -1, -1, 0]
 Dd := [1, 1, -1, 0]
 E := [1, 1, 1, 2]
 F := [1, -1, 1, 2]
 G := [1, -1, -1, 2]
 H := [1, 1, -1, 2]
 Fx := [0, 1, 0, 0]
 Fy := [0, 0, 1, 0]
 Fz := [0, 0, 0, 1]

```

- >  $Ap := \text{evalm}(MB \cdot A)$ ;  $Bp := \text{evalm}(MB \cdot B)$ ;  $Cp := \text{evalm}(MB \cdot C)$ ;  $Dp := \text{evalm}(MB \cdot D)$ ;
- >  $Ep := \text{evalm}(MB \cdot E)$ ;  $Fp := \text{evalm}(MB \cdot F)$ ;  $Gp := \text{evalm}(MB \cdot G)$ ;  $Hp := \text{evalm}(MB \cdot H)$ ;  $Fxp$
- >  $p := \text{evalm}(MB \cdot Fx)$ ;  $Fyp := \text{evalm}(MB \cdot Fy)$ ;  $Fzp := \text{evalm}(MB \cdot Fz)$ ;

$$Bp := \left[ 16, \frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{30\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Cp := \left[ 12, -\frac{30\sqrt{13}}{13}, \frac{6\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Dp := \left[ 6, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{30\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Ep := \left[ 14, \frac{30\sqrt{13}}{13}, \frac{150\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Fp := \left[ 20, \frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{186\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Gp := \left[ 16, -\frac{30\sqrt{13}}{13}, \frac{162\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

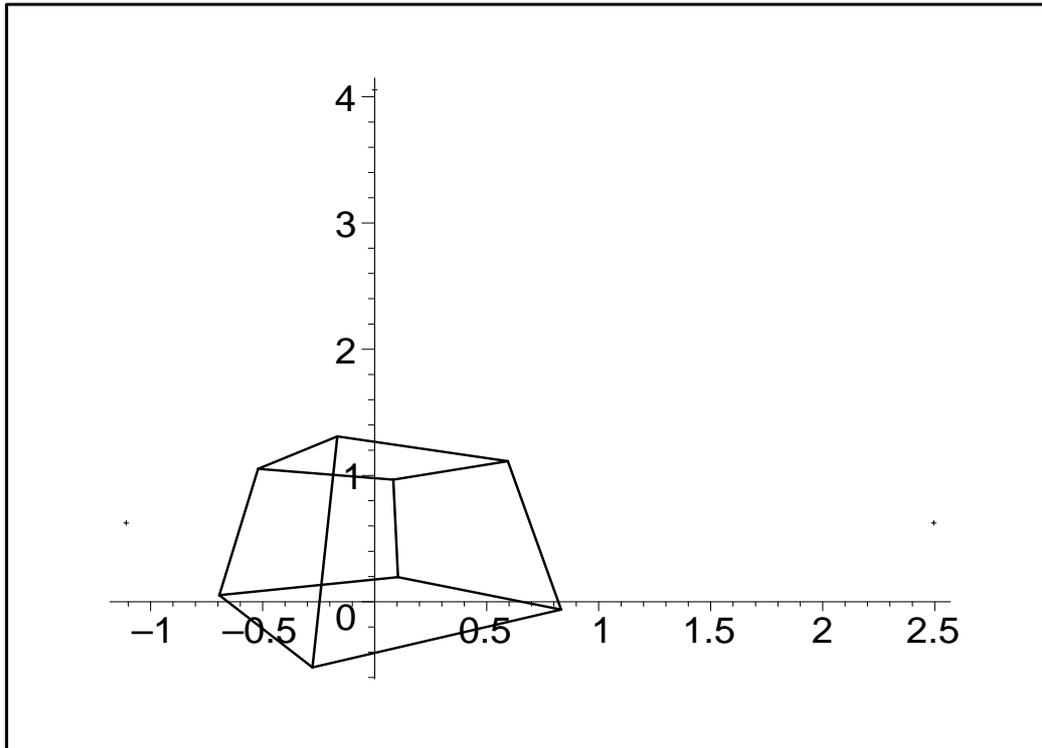
$$Hp := \left[ 10, -\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{126\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Fxp := \left[ -3, \frac{12\sqrt{13}}{13}, -\frac{18\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Fyp := \left[ 2, \frac{18\sqrt{13}}{13}, \frac{12\sqrt{221}}{143}, 0 \right]$$

$$Fzp := \left[ 2, 0, \frac{6\sqrt{221}}{11}, 0 \right]$$

- >  $Wuerfel := \text{plot}([Ap[2]/Ap[1], Ap[3]/Ap[1]], [Bp[2]/Bp[1], Bp[3]/Bp[1]], [Cp[2]/Cp[1], Cp[3]/Cp[1]], [Dp[2]/Dp[1], Dp[3]/Dp[1]], [Ap[2]/Ap[1], Ap[3]/Ap[1]], [Ep[2]/Ep[1], Ep[3]/Ep[1]], [Fp[2]/Fp[1], Fp[3]/Fp[1]], [Gp[2]/Gp[1], Gp[3]/Gp[1]], [Hp[2]/Hp[1], Hp[3]/Hp[1]], [Ep[2]/Ep[1], Ep[3]/Ep[1]])$ , style=
- > line, color=black, thickness=3):
- >  $Wuerfel1 := \text{plot}([Bp[2]/Bp[1], Bp[3]/Bp[1]], [Fp[2]/Fp[1], Fp[3]/Fp[1]])$ , style=
- > line, color=black, thickness=3):
- >  $Wuerfel2 := \text{plot}([Cp[2]/Cp[1], Cp[3]/Cp[1]], [Gp[2]/Gp[1], Gp[3]/Gp[1]])$ , style=
- > line, color=black, thickness=3):
- >  $Wuerfel3 := \text{plot}([Dp[2]/Dp[1], Dp[3]/Dp[1]], [Hp[2]/Hp[1], Hp[3]/Hp[1]])$ , style=
- > line, color=black, thickness=3):
- >  $Fernp := \text{plot}([Fxp[2]/Fxp[1], Fxp[3]/Fxp[1]], [Fyp[2]/Fyp[1], Fyp[3]/Fyp[1]], [Fzp[2]/Fzp[1], Fzp[3]/Fzp[1]])$ , style=
- > point, color=black):
- > display(Wuerfel, Wuerfel1, Wuerfel2, Wuerfel3, Fernp);



Neben den am Anfang dieses Abschnittes genannten Bedingungen für spezielle Projektionen, sollen noch zwei spezielle Axonometrien erwähnt werden, die von keinem der bekannten CAD-Systeme geliefert werden, dennoch aber in der Architekturdarstellung eine wichtige Rolle spielen:

1. Horizontale Axonometrien (Militärriss) ergeben sich für:  $z_0 = 0, u_1 = u_2 = 0$
2. Frontale Axonometrien (Schrägriß, Kavalierriß) ergeben sich für:  $z_0 = 0, u_2 = u_3 = 0$

## 2.3 Transformationen

Für das Operieren in CAD-Systemen sind neben den Projektionen die Transformationen, die auf Punktmenge des Raumes oder auch nur einer Ebene ausgeübt werden können extrem wichtig. Wir beginnen mit Transformationen in der Ebene und werden die Betrachtungen dann auf Objekte des 3-dim Raumes ausdehnen.

Wir werden sämtliche Transformationen mit Hilfe von Transformationsmatrizen darstellen. Die Bauart der Matrizen wird durch die Art der Transformation bestimmt.

### Translation (Schiebung) in der Ebene

Eine Translation der Punkte  $X(x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$  einer Ebene  $\varepsilon$  ist durch die Angabe eines Schiebvektors  $\mathbf{t} = (\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)^T$  bestimmt. Da wir mit homogenen Koordinaten arbeiten ist die Transformationsmatrix (der Matrizenoperator) eine  $3 \times 3$ -Matrix. Eine Translation ist gegeben durch

$$X' := \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Eine Translation ist in CAD-Systemen durch die Befehle Schieben, Kopieren, Move, Copy implementiert.

**Beispiel 2.3.1** Eine Translation ist durch den Schiebvektor  $\mathbf{t} = (2, -4)^T$  gegeben. Man ermittle die Transformationsmatrix und die Bildkoordinaten des Dreiecks  $A(0,0)$ ,  $B(2,0)$ ,  $C(1,3)$ .

Lösung: nach Gl. (2.6) erhalten wir für die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T} =$$

Da wir die Matrix mit den homogenen Koordinaten der Punkte multiplizieren müssen erhalten wir z.B. für den Punkt C:

$$\mathbf{C}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Durch eine analoge Rechnung erhält man für die Punkte B und A die Bildkoordinaten  $A' = (1 : 2 : -4) = (2, -4)$ ,  $B' = (1 : 3 : -4) = (3, -4)$ . Wir vermerken, dass Ausgangsobjekt (Dreieck) und Bildobjekt (Bilddreieck) kongruent sind; die Seiten sind gleich lang, die Winkel sind gleich groß, die Fläche ist gleich groß usw. ....

### Rotation (Drehung) in der Ebene

Eine Drehung in der Ebene ist durch Angabe des Drehzentrums und des Drehwinkels  $\varphi$  gegeben. Wir geben zuerst die Drehung um den Ursprung des Koordinatensystems an

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Bei der Drehung um einen allgemeinen Punkt  $P(p_1, p_2)$  kann man folgendermaßen vorgehen: Man schiebt das Koordinatensystem so, dass der Punkt  $P$  Ursprung wird, dreht und schiebt wieder zurück. Die zusammengesetzte Transformation ergibt die Drehung um  $P$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' = \mathbf{TDT}^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 & 1 & 0 \\ p_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -p_1 & 1 & 0 \\ -p_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ p_1 - p_1 \cos \varphi + p_2 \sin \varphi & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ p_2 - p_1 \sin \varphi - p_2 \cos \varphi & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.8}$$

**Bemerkung 2.3.1** Eine Drehung um  $\pm 180^\circ$  ist eine Punktspiegelung am Zentrum  $Z$ .

**Beispiel 2.3.2** Man ermittle die Matrix der Drehung um den Punkt  $P(2,3)$  mit dem Drehwinkel  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ .

Lösung: Einsetzen in Gl.(2.8) ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{2}\sqrt{3} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Affinitäten:**

Affinitäten sind die allgemeinsten Transformationen, die die Fernpunkte nicht transformieren, d.h. die die Parallelität erhalten. Wir geben eine Normalform an, die die x-Achse als Affinitätsachse besitzt.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Wir erhalten durch spezielle Wahl der beiden Parameter  $p, q$  eine Reihe von bekannten Transformationen:

1. Für  $p = 0, q \neq 0$ : orthogonale perspektive Affinitäten.
2. Für  $q = -1$  Affinspiegelungen.
3. Für  $p = 0, q = -1$  (axiale) Spiegelungen.
4. Für  $q = 1$  Scherungen.

Die Determinante der Transformationsmatrix von Spiegelung, Scherung und Affinspiegelung ist gleich eins. Daher sind diese Transformationen inhaltstreu.

**Axiale Spiegelung:** Diese Transformation ist eine ungleichsinnige Transformation weil sie den Umlaufsinn eines Dreieckes umkehrt. Wir zeigen die Normalform dieser Transformation als Spiegelung an der x-Achse. Sie besitzt die Transformationsmatrix.

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Wie man leicht ausrechnet ist die Determinante von  $\mathbf{S}$  gleich  $-1$ , was ein Kennzeichen aller Transformationen ist, die den Richtungssinn umkehren. Auf die Darstellung einer Spiegelung um eine allgemeine Achse wollen wir hier nicht eingehen.

Alle bisherigen Transformationen, mit Ausnahme der Affinitäten, haben die Punktmengen in kongruente Punktmengen übergeführt. Wenn die Determinante der Transformationsmatrix  $+1$  ist, so spricht man von gleichsinnigen Kongruenztransformationen, wenn sie gleich  $-1$  ist, so heißen die Transformationen ungleichsinnig.

**Skalierung**

Mit der Skalierung eines Objektes verlassen wir den Bereich der Kongruenztransformationen. Hier geht es um die Vergrößerung und Verkleinerung von Punktmengen. Eine Skalierung ist in CAD Systemen so implementiert, dass man ein Objekt entweder in eine oder zwei Richtungen skalieren kann. Wir erlauben beide Möglichkeiten mit der Transformationsmatrix:

$$\mathbf{Sk} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s_1 & 0 \\ 0 & 0 & s_2 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

dabei ist  $s_1$  die Skalierung in der x-Richtung,  $s_2$  ist die Skalierung in der y-Richtung.  $s_1 = s_2$  bedeutet, dass der Skalierungsfaktor in beiden Richtungen gleich ist. Dies liefert eine zentrische Ähnlichkeit vom Ursprung des Koordinatensystems aus.

Wir wenden uns nun räumlichen Transformationen zu. Wir werden uns dabei auf Translationen, Drehungen und Schraubungen beschränken.

### Translationen im Raum

Wie in der Ebene ist eine Translation durch Angabe eines Translationsvektors bestimmt:

$$X' := \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 & 0 & 0 \\ t_2 & 0 & 1 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

### Drehungen im Raum

Eine Drehung im Raum ist durch die Angabe einer Drehachse und einen Drehwinkel bestimmt. Wir geben der Übersichtlichkeit halber die Normalform einer solchen Drehung als Drehung um die z-Achse des Koordinatensystems an:

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Die Drehung um eine allgemeine Achse erhält man wenn durch eine Transformation die allgemeine Drehachse zur z-Achse eines neuen Koordinatensystems gemacht wird und dann wieder zurücktransformiert wird. Diese Transformation besteht aber aus einer Drehung und einer Schiebung; daher soll die Zusammensetzung einer Drehung mit einer Schiebung besprochen werden.

### Schraubung

Die Zusammensetzung einer Drehung um eine Achse mit einer Schiebung längs dieser Achse heißt *Schraubung*. Wir zeigen die Transformation anhand einer Drehung um die z-Achse und einer Schiebung längs der z-Achse.

$$\mathbf{SCH} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ t_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Eine Schraubung stellt die allgemeinste gleichsinnige Kongruenztransformation im 3-dim Raum dar.

## 2.4 Bewegung

Die bisher behandelten Transformationen stellen diskrete Transformationen dar. Drehwinkel, Schiebvektoren, Skalierungsfaktoren haben in diesen Transformationen feste Werte. Wenn nun diese Größen von einem (Zeit)Parameter abhängen, dann entstehen Bewegungen. Diese Bewegungen sind euklidische Bewegungen wenn die Transformationen Schiebungen, Drehungen oder Schraubungen sind (oder: gleichsinnige Kongruenztransformationen sind).

Bei dieser Parameterabhängigkeit der Transformationen beschreibt nun jeder Punkt eine *Bahnkurve*, jede Kurve eine *Bahnfläche*, jedes Gebiet einen *Körper* (ein *solid*). Wir zeigen die Auswirkungen dieser Parameterabhängigkeit anhand eines Maple-worksheets:

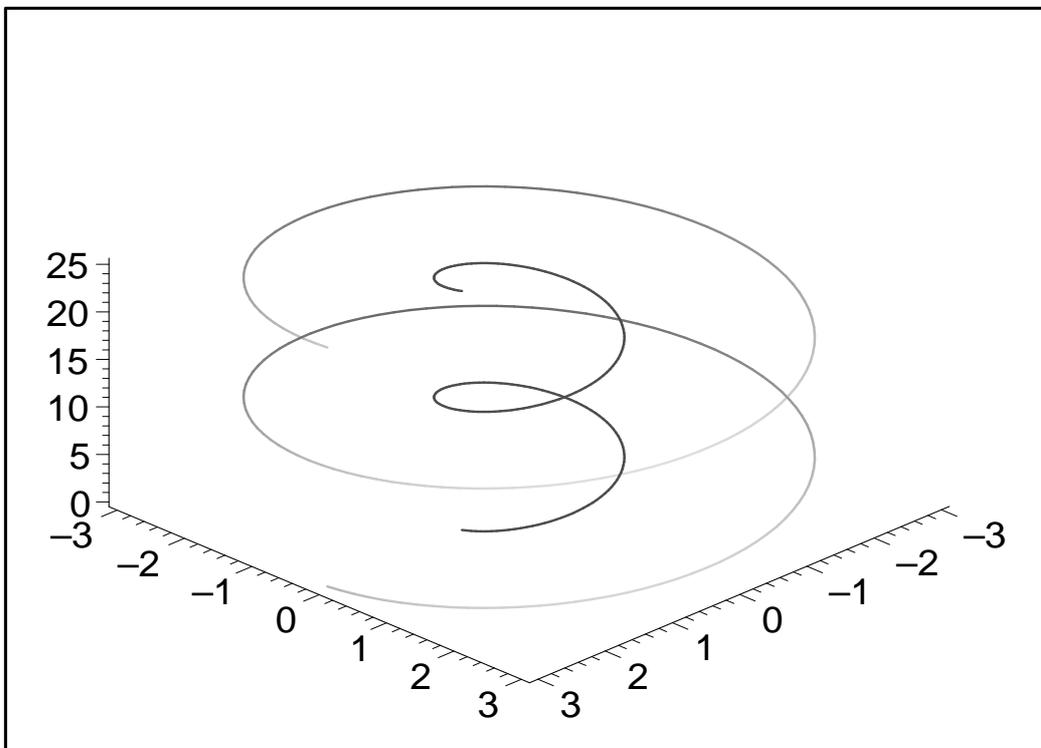
### Worksheet: Schraubung, Drehung, Schiebung

```
> with(plots):with(linalg):
> A:=matrix(4,4,[1,0,0,0,0,cos(t),-sin(t),0,0,sin(t),cos(t),0,p*t,0,0,1]
>);
```

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ pt & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Bahnkurve eines Punktes ist eine Schraublinie. Definition der Schraublinien mit der z-Achse als Schraubachse und dem Parameter p

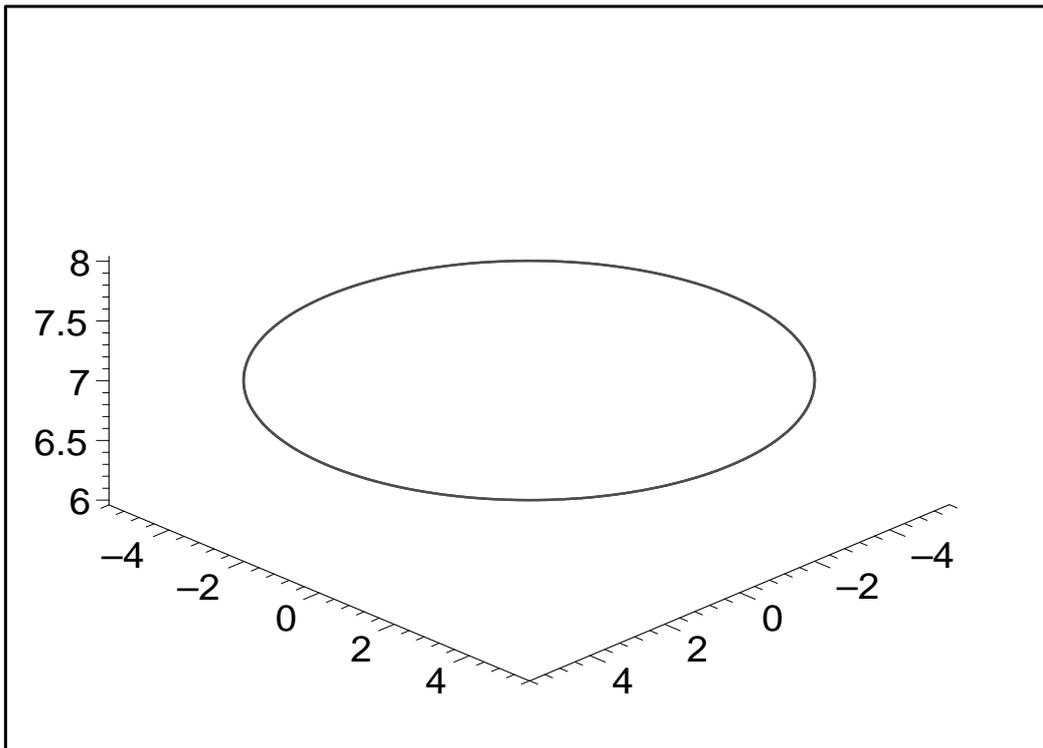
```
> Schraublinie:=evalm(A&*vector([1,x,y,z]));
 Schraublinie := [1, cos(t)x - sin(t)y, sin(t)x + cos(t)y, pt + z]
> Schraublinie1:=subs(x=1,y=0,z=0,p=2,op(Schraublinie));
> Schraublinie2:=subs(x=3,y=0,z=0,p=2,op(Schraublinie));
 Schraublinie1 := [1, cos(t), sin(t), 2t]
 Schraublinie2 := [1, 3cos(t), 3sin(t), 2t]
> s1:=spacecurve([Schraublinie1[2],Schraublinie1[3],Schraublinie1[4]],
> t=0..4*Pi,thickness=3,numpoints=200,color=red);
> s2:=spacecurve([Schraublinie2[2],Schraublinie2[3],Schraublinie2[4]],
> t=0..4*Pi,thickness=3,numpoints=200,axes=frame):
> display3d({s1,s2});
```



```
> Drehmatrix:=subs(p=0,op(A));
```

$$\text{Drehmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ```
> Bahn:=evalm(Drehmatrix&*vector([1,x,y,z]));
      Bahn := [1, cos(t) x - sin(t) y, sin(t) x + cos(t) y, z]
> Bahn1:=subs(x=2,y=5,z=7,op(Bahn));
      Bahn1 := [1, 2 cos(t) - 5 sin(t), 2 sin(t) + 5 cos(t), 7]
> spacecurve([Bahn1[2],Bahn1[3],Bahn1[4]],
> t=0..4*Pi,thickness=3,numpoints=200,color=red,axes=FRAME);
```

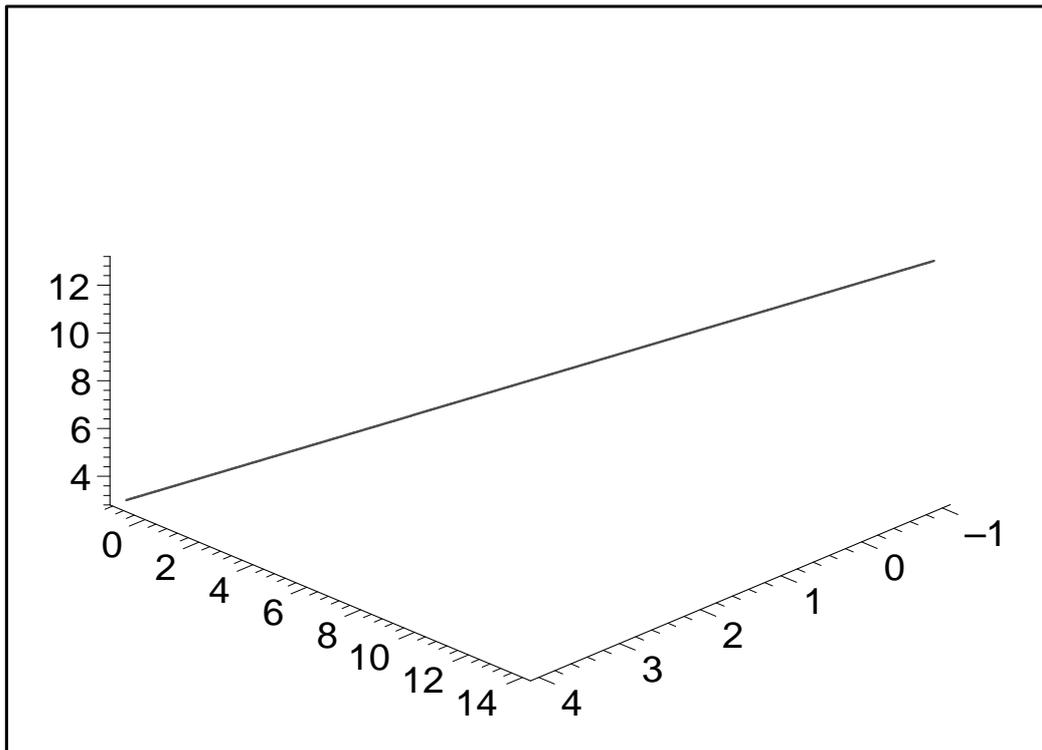


Wenn der Drehanteil der Bewegung die Einheitsmatrix ist, dann ist die zugehörige Bewegung eine Schiebung :

- ```
> Schiebmatrix:=matrix(4,4,[1,0,0,0,r*t,1,0,0,q*t,0,1,0,p*t,0,0,1]);
```

$$\text{Schiebmatrix} := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ r t & 1 & 0 & 0 \\ q t & 0 & 1 & 0 \\ p t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- ```
> Bahnkurve:=evalm(Schiebmatrix&*vector([1,x,y,z]));
      Bahnkurve := [1, r t + x, q t + y, p t + z]
> Bahnkurve1:=subs(x=2,y=5,z=7,p=2,q=3,r=-1,op(Bahnkurve));
      Bahnkurve1 := [1, -t + 2, 3t + 5, 2t + 7]
> spacecurve([Bahnkurve1[2],Bahnkurve1[3],Bahnkurve1[4]],
> t=-2..3,thickness=3,numpoints=200,color=red,axes=FRAME);
```



Im Schiebenteil der Bewegung können auch nichtlineare Funktionen des Bewegungsparameters t vorkommen. Man spricht dann von einer krummen Schiebung:

```
> KSchiebmatrix:=matrix(4,4,[1,0,0,0,t,1,0,0,3+t,0,1,0,1/2*t^2,0,0,1]);
```

$$KSchiebmatrix := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & 1 & 0 & 0 \\ 3+t & 0 & 1 & 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> Bahnku:=evalm(KSchiebmatrix&*vector([1,x,y,z]));
```

$$Bahnku := \left[1, t+x, 3+t+y, \frac{t^2}{2}+z \right]$$

```
> Bahnku1:=subs(x=2,y=5,z=7,op(Bahnku));
```

$$Bahnku1 := \left[1, t+2, 8+t, \frac{t^2}{2}+7 \right]$$

```
> Bahnku2:=subs(x=3,y=-5,z=1,op(Bahnku));
```

$$Bahnku2 := \left[1, 3+t, -2+t, \frac{t^2}{2}+1 \right]$$

```
> p1:=spacecurve([Bahnku1[2],Bahnku1[3],Bahnku1[4]],
```

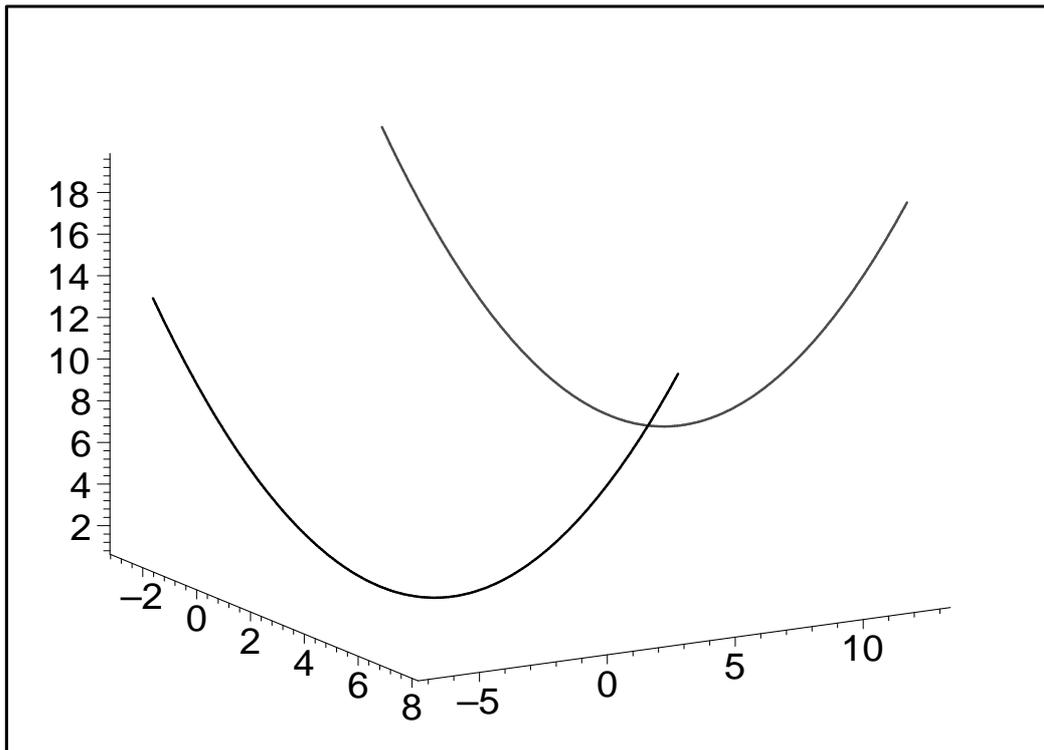
```
> t=-5..5,thickness=3,numpoints=200,color=red,axes=FRAME);
```

```
> p2:=spacecurve([Bahnku2[2],Bahnku2[3],Bahnku2[4]],
```

```
> t=-5..5,thickness=3,numpoints=200,color=black,axes=FRAME,orientation=[
```

```
> -30,70]);
```

```
> display3d({p1,p2});
```



Kapitel 3

Kurven, Flächen und Solids

In diesem Abschnitt werden die mathematische Beschreibung von ebenen und räumlichen Objekten behandelt. Die Beschreibungen sind die Grundlage für die Darstellung dieser Objekte im Computer.

3.0.1 Kurvendarstellung

Explizite Darstellung

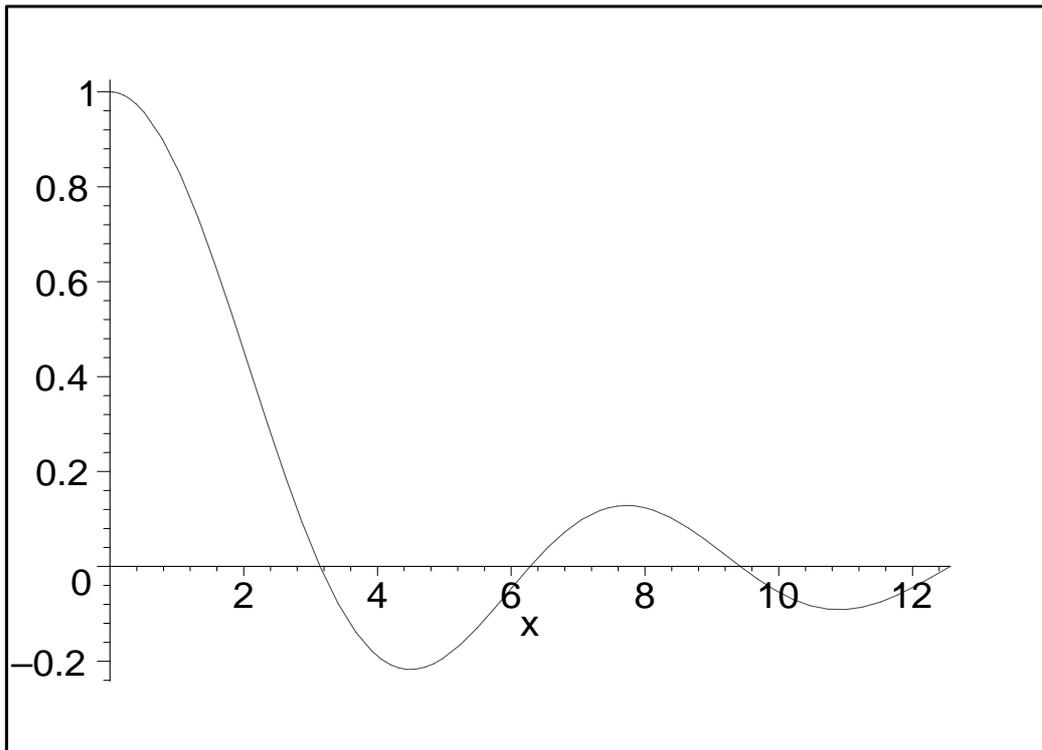
Betrachten wir zuerst Kurven in der Ebene. Die aus der AHS oder BHS bekannte Darstellung von Funktionen in einem ebenen Koordinatensystem nennt man *explizite Kurvendarstellung* $y = f(x)$. x durchläuft dabei ein Definitionsintervall $I \subset \mathbb{R}$. Wesentlich ist, dass jedem Punkt des Definitionsintervalls ein Funktionswert entspricht.

Beispiel:

```
> y:=1/x*sin(x);
```

$$y := \frac{\sin(x)}{x}$$

```
> plot(y,x=0..4*Pi);
```



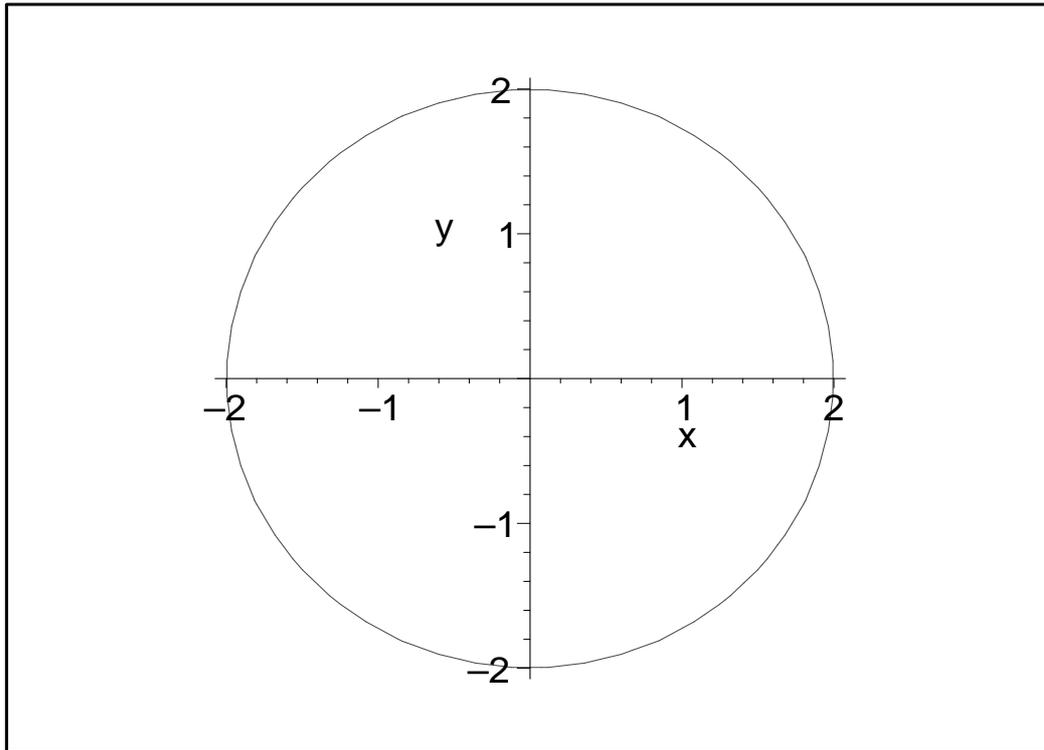
Implizite Darstellung

Mit der expliziten Darstellung läßt sich naturgemäß nur eine sehr eingeschränkte Zahl von Kurven (nämlich nur die Funktionen) beschreiben. Durch die *implizite Darstellung* $f(x, y) = 0$, bei der beide Koordinaten Funktionen sind, lassen sich alle ebenen Kurven beschreiben. Die explizite Darstellung ist ein Sonderfall der impliziten Darstellung.

Beispiel 1:

Die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ stellt einen Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt $M(0,0)$ dar, während $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$ ebenfalls einen Kreis mit dem Radius r aber dem Mittelpunkt $M(m, n)$ beschreibt (Genauer müsste man sagen: die Punkte mit den Koordinaten (x, y) , die Lösungen der impliziten Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$ sind beschreiben den Kreis.

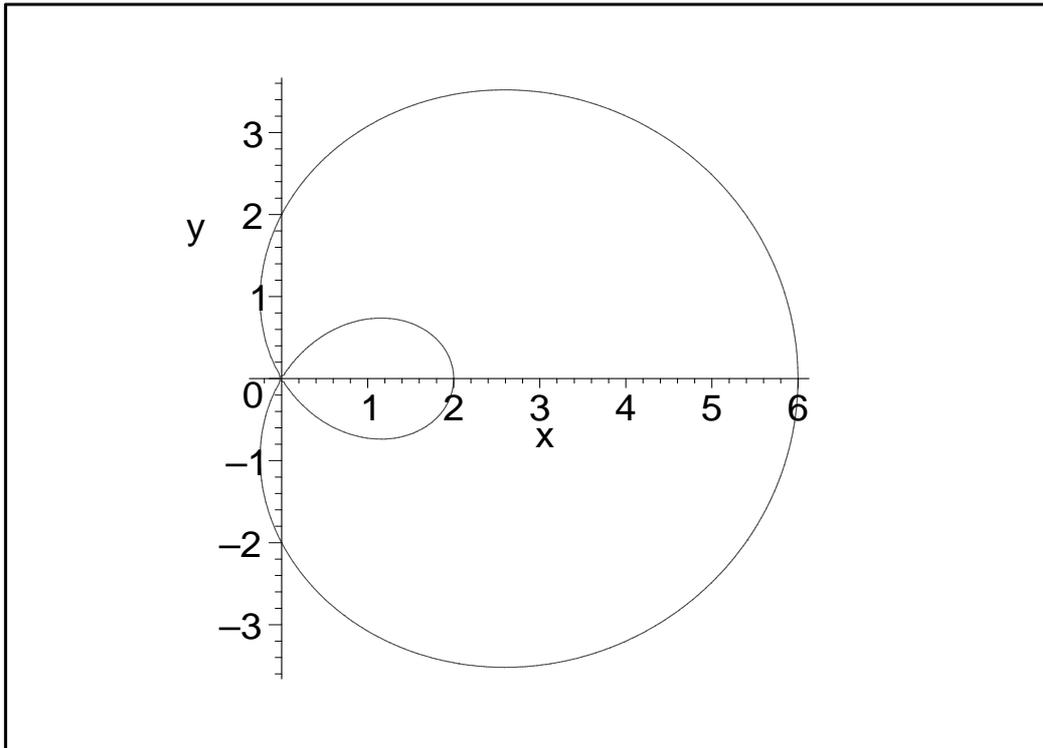
```
> implicitplot(x^2+y^2-4,x=-3..3,y=-3..3,scaling=constrained);
```



Beispiel 2:

Die Gleichung $(x^2 + y^2 - bx)^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$ stellt eine ebene Kurve vom Grad 4 dar. Die beschreibende Gleichung hat als höchste auftretende Potenz 4. Dies ist der Grad der zugehörigen Kurve. Geometrisch heißt dies, dass eine Gerade die Kurve in höchstens vier Punkten schneiden kann. Kurven, die sich durch eine Gleichung beschreiben lassen in der nur Potenzen der Unbekannten vorkommen heißen *algebraische Kurven*. Viele derartigen Kurven sind in der Vergangenheit eingehend untersucht worden. Dies begann bereits in der Hochblüte der griechischen Geometrie und geht herauf bis heute. Viele Kurven tragen daher die Namen ihrer Entdecker. Die Beispielskurve heißt *Pascalschnecke*. Ihre Form hängt wesentlich von den beiden "Designparametern" a, b ab.

```
> implicitplot((x^2+y^2-4*x)^2-4*(x^2+y^2),x=-0.5..6,y=-4..4,numpoints=
> 15000,scaling=constrained);
```



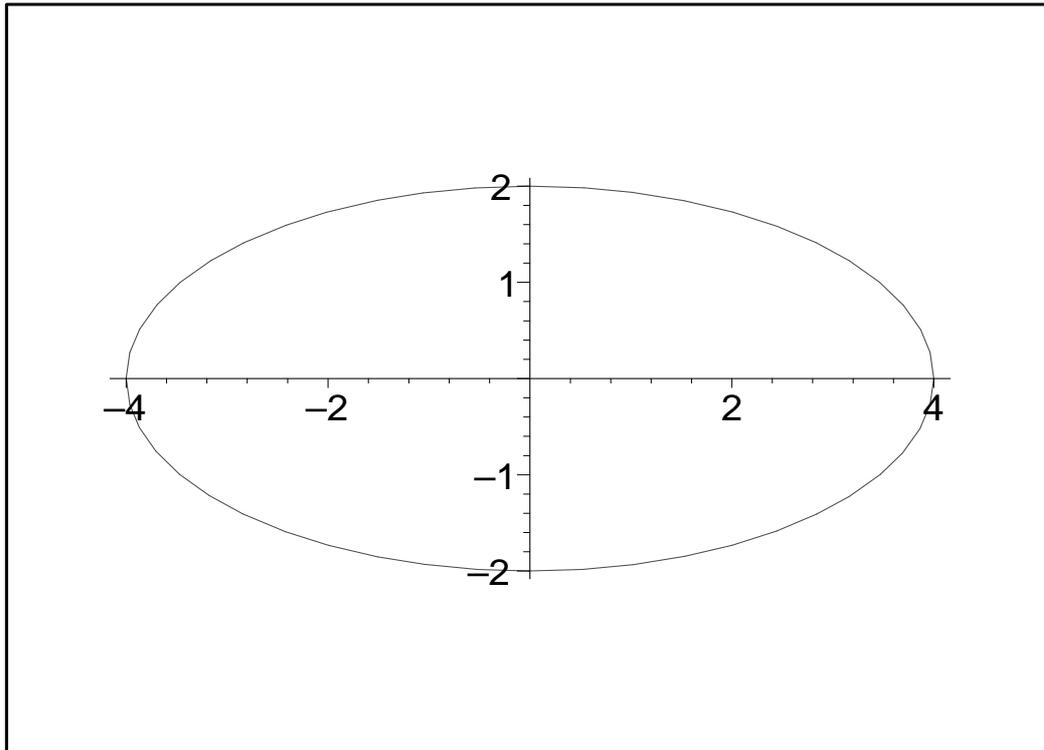
Parameterdarstellung

Mit der impliziten Darstellung lassen sich die ebenen Kurven gut beschreiben und auch geometrisch untersuchen. Aber wie man im obigen Beispiel sieht, ist die Darstellung schlecht für die Computergraphik, denn es müssen viele Punkte untersucht werden, ob sie Lösungspunkte der angegebenen Gleichung sind (Maple hat dafür die Variable `numpoints`). Für die Computergraphik am Besten geeignet ist die *Parameterdarstellung* $x = f(t), y = g(t); t = [t_0..t_1] \subset \mathbb{R}$. Man kann sich vorstellen, dass der Parameter t die Zeit darstellt, dann stellt die Kurve die Lagen einzelner Punkte in Abhängigkeit von der Zeit dar.

Beispiel 1:

Die Parameterdarstellung $x = 4 \cos(t), y = 2 \sin(t)$ stellt eine Ellipse mit der Hauptachsenlänge $a = 4$ und der Nebenachsenlänge $b = 2$ dar. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ wäre die implizite Gleichung derselben Ellipse, wie man leicht durch Quadrieren und Addieren der Parameterdarstellung errechnet.

```
> plot([4*cos(t),2*sin(t),t=0..2*Pi],scaling=constrained);
```

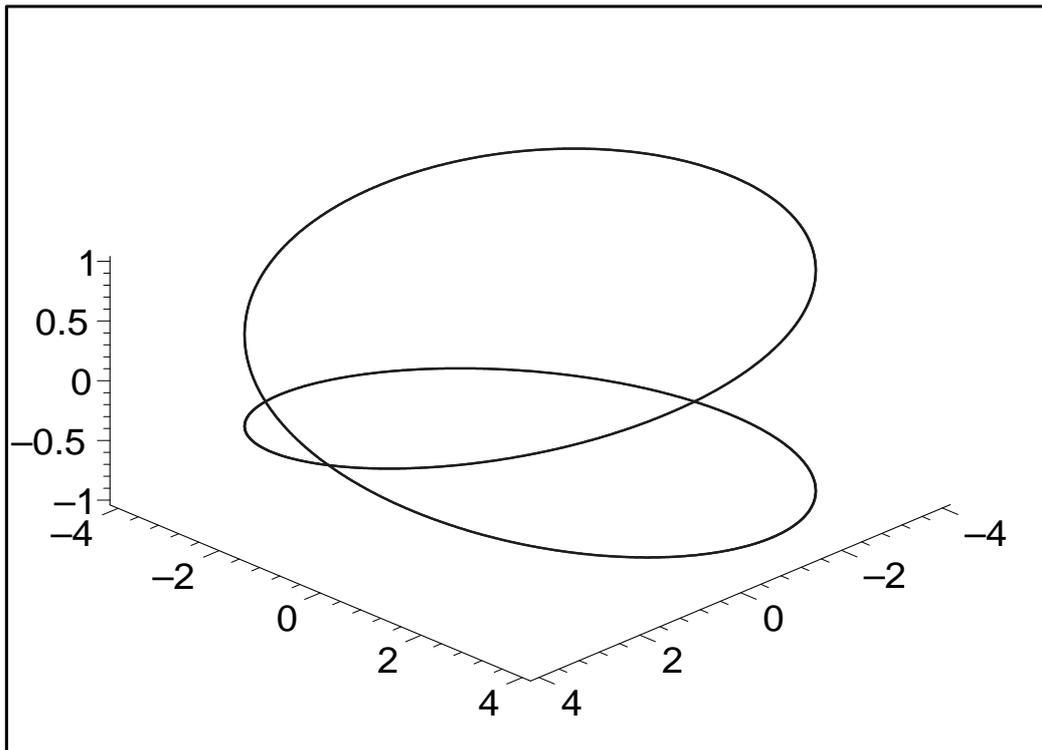


Die Parameterdarstellung von ebenen Kurven lässt sich leicht auf *Raumkurven* ausdehnen indem man einfach eine Parameterfunktion für die z-Koordinate hinzunimmt: $x = f(t), y = g(t), z = h(t); t = [t_0..t_1] \subset \mathbb{R}$

Beispiel 2:

Gegeben sei die Kurve $x = 4 \cos(t), y = 4 \sin(t), z = \sin(\frac{t}{2})$. Wie man leicht zeigen kann ist der Grundriss dieser Kurve ein Kreis und der Kreuzriss ist eine Parabel. Die Kurve ist daher die Durchdringungskurve zwischen einem Drehzylinder und einem parabolischen Zylinder. Sie entsteht auch dadurch, dass eine Drehbewegung mit der z-Achse als Drehachse mit einer Auf- und Abbewegung (Sinusschwingung) entlang der z-Achse überlagert wird.

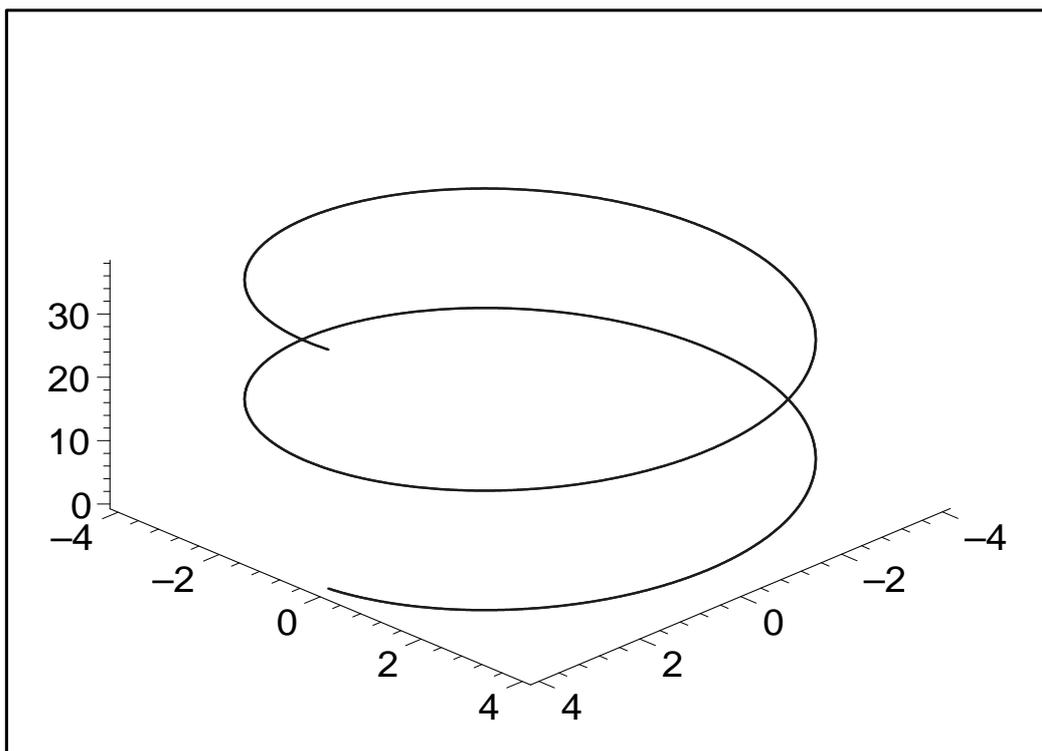
- ```
> spacecurve([4*cos(t),4*sin(t),sin(t/2)],t=0..4*Pi,thickness=3,axes=frame,
> numpoints=2000,color=blue);
```



### Beispiel 3:

Als zweites Beispiel für eine Raumkurve sei die technisch wichtige *Schraublinie*  $x = r \cos(t)$ ,  $y = r \sin(t)$ ,  $z = pt$  genannt.

```
> spacecurve([4*cos(t),4*sin(t),3*(t)],t=0..4*Pi,thickness=3,axes=frame
> ,numpoints=2000,color=blue);
```



### 3.0.2 Flächendarstellung

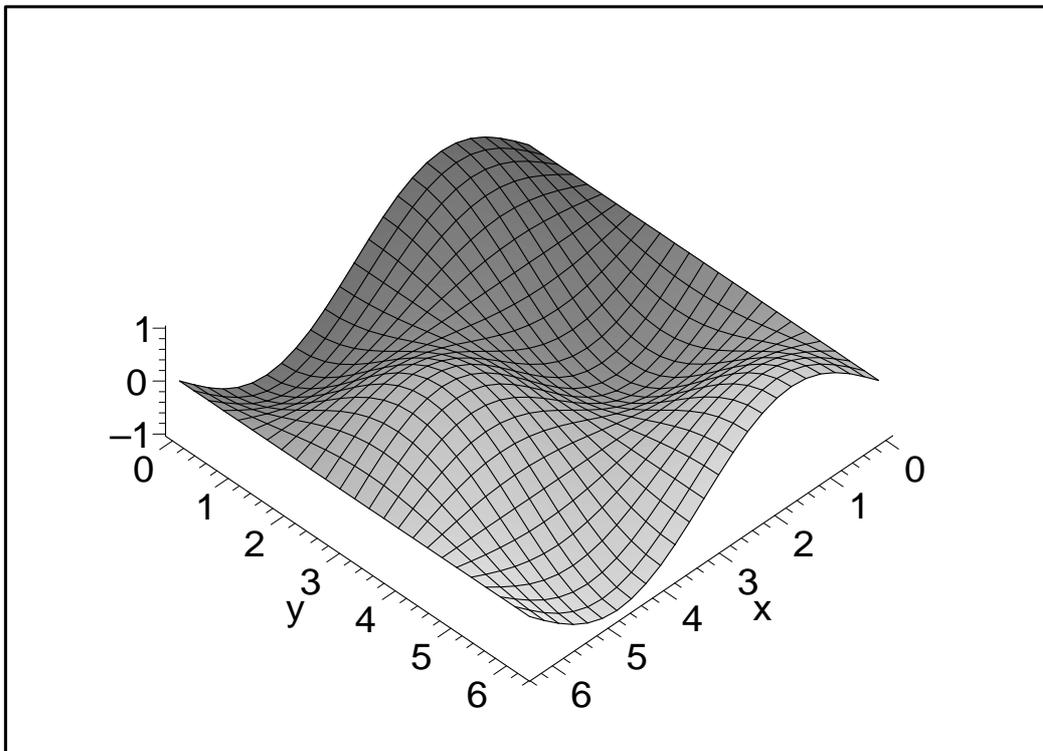
#### Explizite Darstellung

Ganz analog zur expliziten Darstellung von ebenen Kurven lassen sich durch eine Funktion von zwei Variablen  $z = f(x, y)$  Flächen angeben. Auch hier ist diese Darstellung eine starke Einschränkung der Formenvielfalt, weil ja jedem Punkt über der  $xy$ -Ebene genau ein Punkt im Raum entspricht.

Beispiel 1:

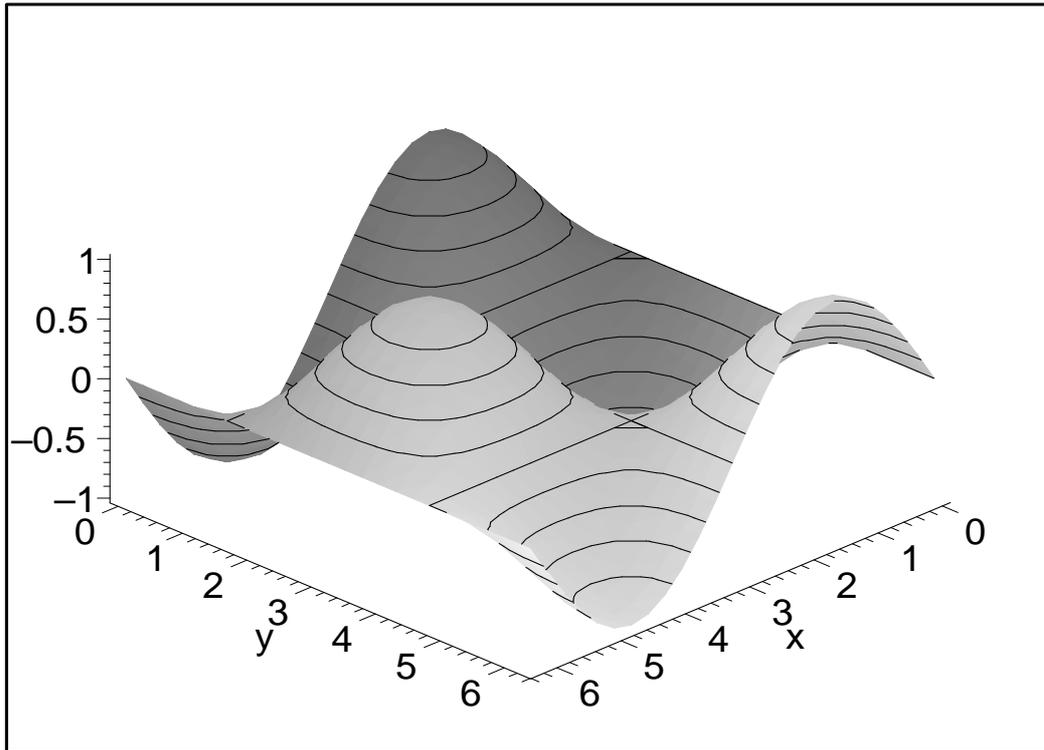
Gegeben sei die Funktion  $z = \sin(x) \cos(y)$ .

```
> plot3d(sin(x)*cos(y),x=0..2*Pi,y=0..2*Pi,axes=frame,scaling=constrained);
```



Eine etwas andere Darstellung derselben Fläche liefert ein sogenannter Konturplot (Höhen-schichtlinien)

```
> plot3d(sin(x)*cos(y),x=0..2*Pi,y=0..2*Pi,axes=frame,style=patchcontour);
```



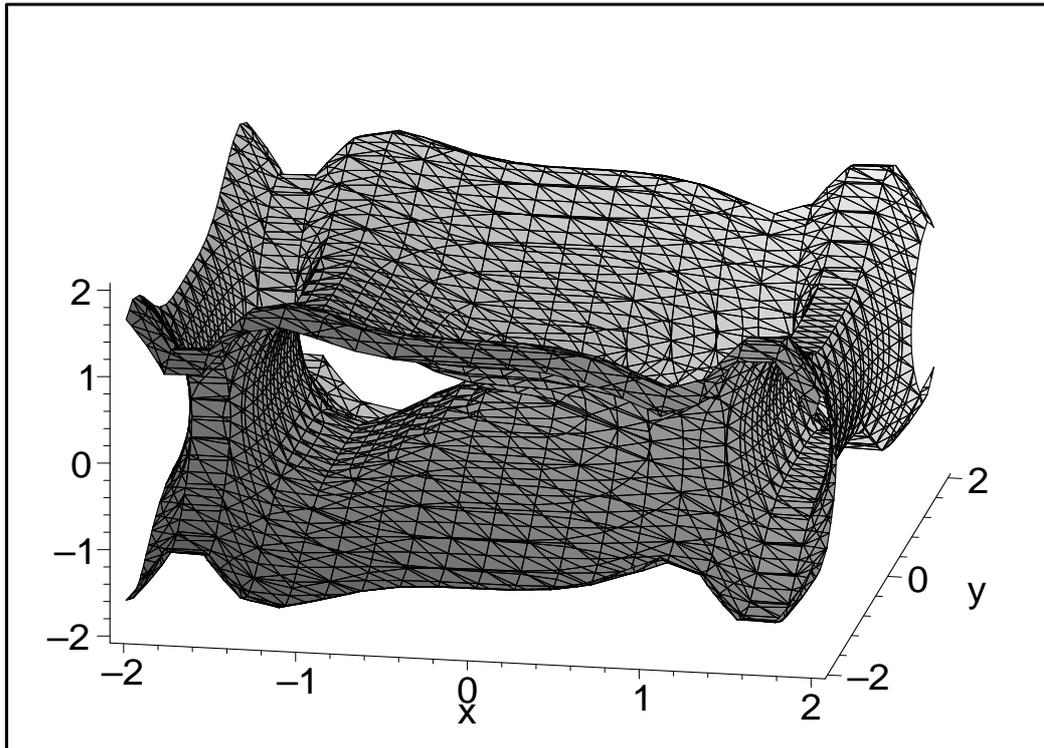
### Implizite Darstellung

Die implizite Darstellung für Flächen lautet  $f(x, y, z) = 0$ . Mit dieser Darstellung können Flächen zwar optimal untersucht werden. Für die Computerdarstellung ist diese Gleichungsform jedoch nicht sehr geeignet. Im Computer werden zur Darstellung Lösungspunkte durch Scannen eines gewissen Koordinatenbereiches ausgerechnet und dann durch ein Maschnetz verbunden.

#### Beispiel 1:

Als Beispiel zeigen wir die Fläche  $\sin(x^3) + \cos(y^2) + z^2 - 1$

- ```
> implicitplot3d(sin(x^3)+cos(y^2)+z^2-1,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,axes=frame,
> orientation=[-80,60],grid=[19,19,19]);
```



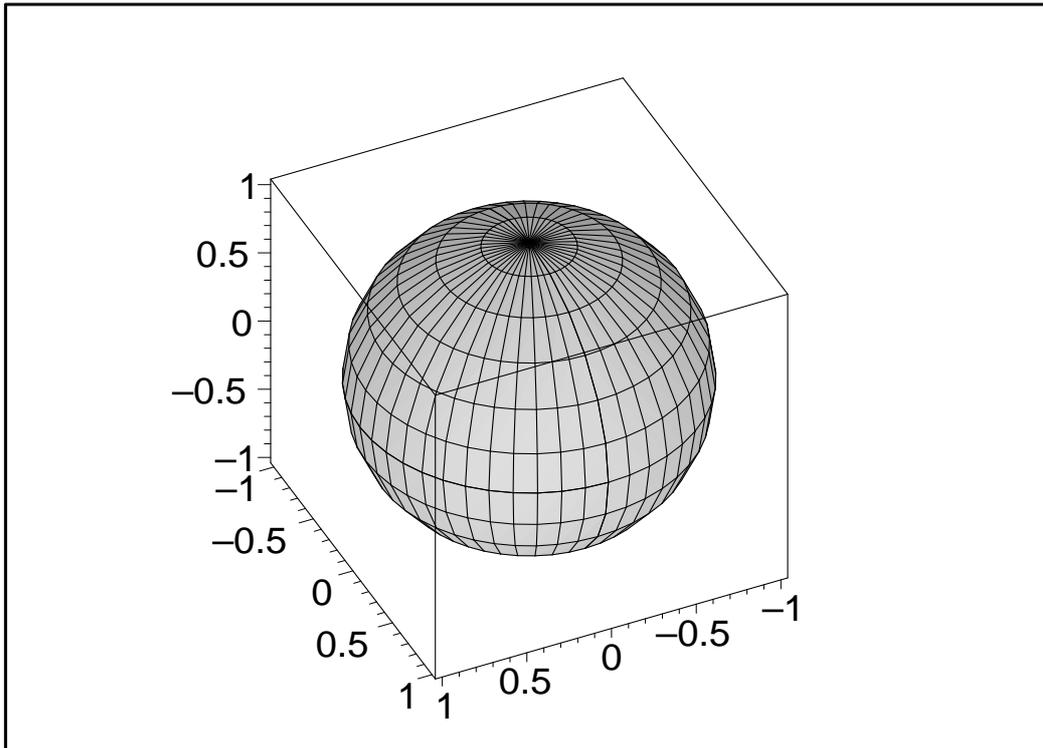
Parameterdarstellung

Wie für Kurven ist die Parameterdarstellung auch für Flächen die am Besten geeignete für die Computerbehandlung. Da die Flächen zweidimensionale Gebilde sind, müssen die Koordinatenfunktionen von zwei Parametern abhängen: $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = h(u, v)$, $u, v \in G \subset \mathbb{R}^2$. Die Flächenkurven $u = \textit{konstant}$, $v = \textit{konstant}$ heißen Parameterlinien auf der Fläche.

Beispiel 1: Durch die Parameterdarstellung $x = \cos(v) \sin(u)$, $y = \cos(v) \cos(u)$, $z = \sin(v)$

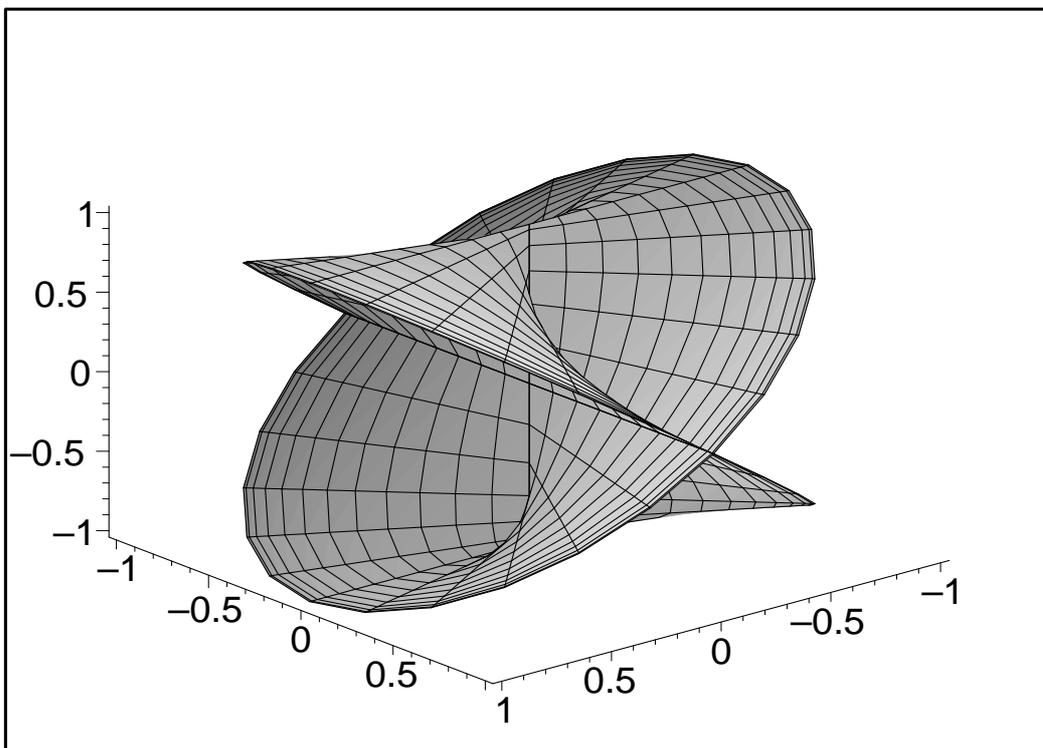
ist eine Kugel gegeben. Die Parameterlinien $u = \textit{konstant}$, und $v = \textit{konstant}$ sind die Breitenkreise und die Längengrade eines geographischen Koordinatensystems. Bis auf Nordpol und Südpol kann jeder Punkt auf der Kugel durch ein feste Paar von Parametern u, v (Länge und Breite) festgelegt werden.

```
> plot3d([cos(v)*sin(u), cos(v)*cos(u), sin(v)], u=0..Pi, v=0..2*Pi, scaling
> =constrained, axes=boxed, orientation=[65,50]);
```



Beispiel 2: In diesem Beispiel soll gezeigt werden wie sehr sich eine kleine Änderung der Koordinatenfunktionen auf die Form der resultierenden Fläche auswirkt. $x = \cos(u) \sin(v)$, $y = \cos(v) \cos(u)$, $z = \sin(v)$ beschreibt ein Plückerkonoid, eine Regelfläche weil diese Fläche eine Schar von Geraden trägt.

```
> plot3d([cos(u)*sin(v),cos(v)*cos(u),sin(v)],u=0..Pi,v=0..2*Pi,axes=frame,orientation=[50,60]);
```



Kapitel 4

Freiformkurven und Freiformflächen

Die Konstruktion und Darstellung von Freiformflächen und Freiformkurven gewinnen im Zeitalter des Computers immer mehr an Bedeutung. Aus dem inzwischen weit entwickelten Gebiet der verschiedenen Kurven- und Flächendarstellungen werden wir exemplarisch die Bezierkurven und Bezierflächen behandeln und kurz auf deren Weiterentwicklungen B-Splines und NURBS eingehen. Grundsätzlich geht es bei der Konstruktion von Freiformflächen oder Freiformkurven immer darum, eine gewisse Anzahl von gegebenen Punkten (Kontrollpolygon bzw. Kontrollpunktenetz) durch eine Kurve bzw. eine Fläche anzunähern (*Approximation*) oder eine Kurve oder Fläche durch eine gewisse Anzahl von gegebenen Punkten (Kurvenpunkte, Flächenpunkte) hindurchzulegen (*Interpolation*). Für den planenden Architekten ist es nun wichtig eine Kurve oder Fläche interaktiv am Bildschirm verändern zu können. Dies geschieht in beiden Fällen mit Hilfe der Kontrollpunkte, die man sich wie Griffe vorstellen kann an denen der Designer ziehen und schieben kann. Durch Veränderung der Kontrollpunkte wird sich eine Änderung der Kurve ergeben. Ziel dieses Einführungskapitels ist es, die geometrischen und mathematischen Eigenschaften von Freiformobjekten kennenzulernen, sodass ein Designprozess rational durchgeführt werden kann. Es ist im Rahmen dieser Vorlesung nicht möglich auf Einzelheiten dieses schnell wachsenden Wissens- und Anwendungsgebietes näher einzugehen, aber am Beispiel der relativ einfachen Bezierkurven sollen die geometrischen und mathematischen Algorithmen, die zur Konstruktion von Freiformkurven und Flächen führen dargestellt werden.

4.1 Bezierkurven

Ein Einführungsbeispiel

Wir geben eine einfache Konstruktion für Parabelpunkte an, deren Verallgemeinerung unmittelbar zu Bezierkurven führt. Gegeben seien 3 Punkte P_0, P_1, P_2 im \mathbb{E}^3 durch ihre Ortsvektoren $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ und ein Parameter $t \in I \subset \mathbb{R}$. Wir konstruieren:

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1 \quad (4.1)$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2 \quad (4.2)$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1 + t\mathbf{b}_1^1 \quad (4.3)$$

Setzen wir (4.1) und (4.2) in (4.3) ein, so erhalten wir einen quadratischen Ausdruck in t , der eine Parabel bestimmt, wenn t das Intervall $(-\infty, \infty)$ durchläuft.

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2, \quad (4.4)$$

Eine konstruktive Auswertung von (4.4) zeigt Abb.4.1.

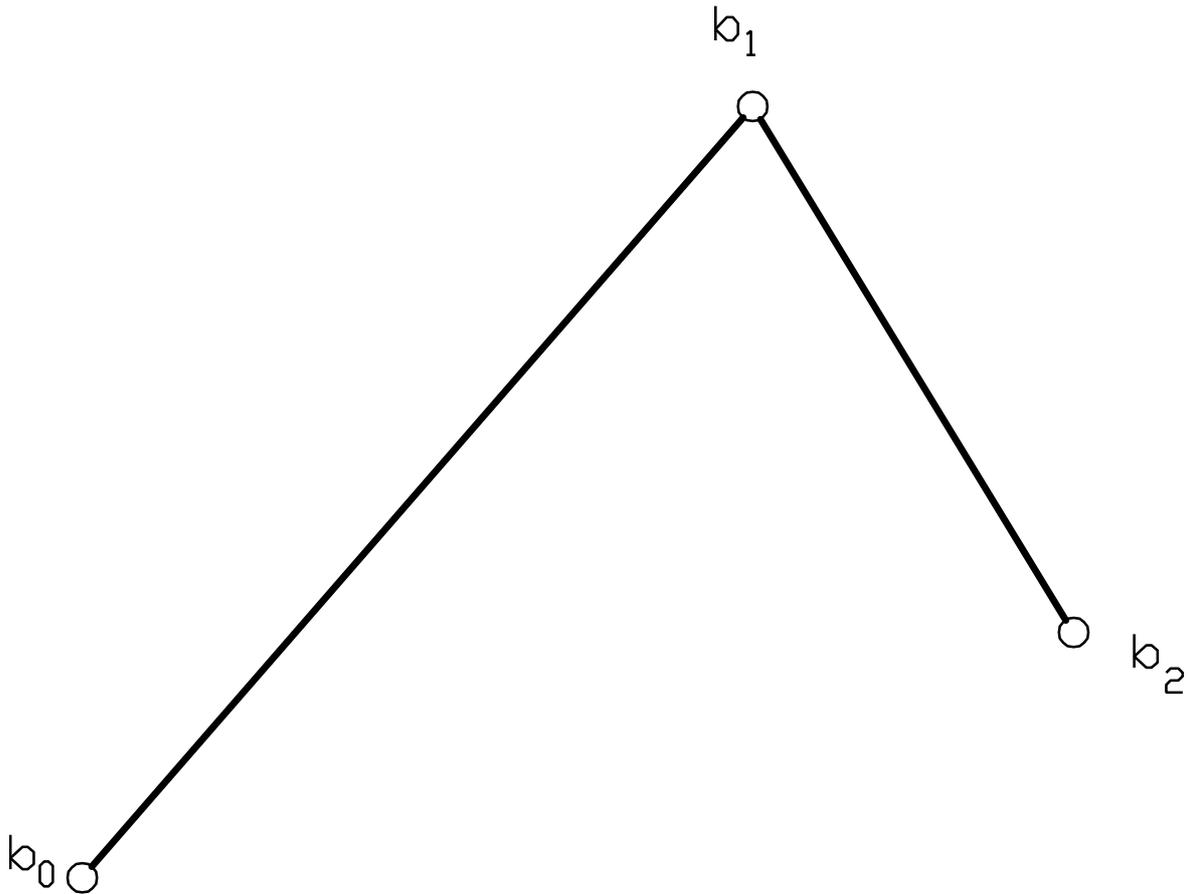


Abbildung 4.1: Parabelkonstruktion nach (4.4)

Der de Casteljau Algorithmus

Parabeln sind ebene Kurven zweiter Ordnung, da man aber auch Kurven im Raum beliebiger Ordnung n erzeugen möchte, wird man die in (4.1)-(4.4) angegebene Konstruktion verallgemeinern: Gegeben seien die Punkte $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^3$ und ein Parameter $t \in I \subset \mathbb{R}$. Wir setzen:

$$\mathbf{b}_i^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1} \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \quad (4.5)$$

und $\mathbf{b}_i^0(t) = \mathbf{b}_i$

Dann beschreibt der Punkt $\mathbf{b}_0^n(t)$ einen Punkt der Bezierkurve zum Parameter t und die Ausgangspunkte \mathbf{b}_i $i = 0, \dots, n$ heißen ihr *Kontrollpolygon*. Als Anwendung von Formel (4.5) berechnen wir im Beispiel 4.1.1 einen Punkt einer Bezierkurve 3. Ordnung ausführlich.

Beispiel 4.1.1 Bezierkurve 3. Ordnung: Gegeben seien die Punkte $\mathbf{b}_0 = (0, 0, 0)^t$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0, 0)^t$, $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0)^t$ und $\mathbf{b}_3 = (0, 1, 1)^t$. Man berechne und zeichne den Bezierkurvenpunkt zum Parameterwert $t = \frac{1}{2}$.

Lösung: Aus den gegebenen Punkten des Kontrollpolygons werden schrittweise die Zwischenpunkte ermittelt, aus denen sich dann der Bezierkurvenpunkt \mathbf{b}_0^3 berechnet:

1. Schritt:

$$\mathbf{b}_0^1 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{b}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1^1 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_2^1 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. Schritt:

$$\mathbf{b}_0^2 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}_1^2 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{b}_1^1 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2^1 = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

3. Schritt:

$$\mathbf{b}_0^3 = (1 - \frac{1}{2})\mathbf{b}_0^2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_1^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

Durchläuft der Parameter t das Intervall $[0, 1]$, so beschreibt der Punkt \mathbf{b}_0^3 die Bezierkurve. Eine konstruktive Auswertung der einzelnen Rechenschritte zeigt Abb.4.2.

Eigenschaften von Bezierkurven:

1. Affine Invarianz: Für die Konstruktion der Bezierpunkte wurden nur Teilverhältnisse verwendet, woraus die affine Invarianz unmittelbar folgt (damit folgt unmittelbar auch die Invarianz bei Parallelprojektionen, denn diese sind ja teilverhältnistreu).
2. Die Bezierkurve liegt in der konvexen Hülle des Kontrollpolygons (wichtige Designeigenschaft!).
3. Anfangspunkt \mathbf{b}_0 und Endpunkt \mathbf{b}_n liegen auf der Bezierkurve.
4. Die erste und die letzte Seite des Kontrollpolygons ($\overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$ und $\overline{\mathbf{b}_n\mathbf{b}_{n-1}}$) sind Tangenten im Anfangspunkt und Endpunkt (b_0 und b_n) der Bezierkurve.

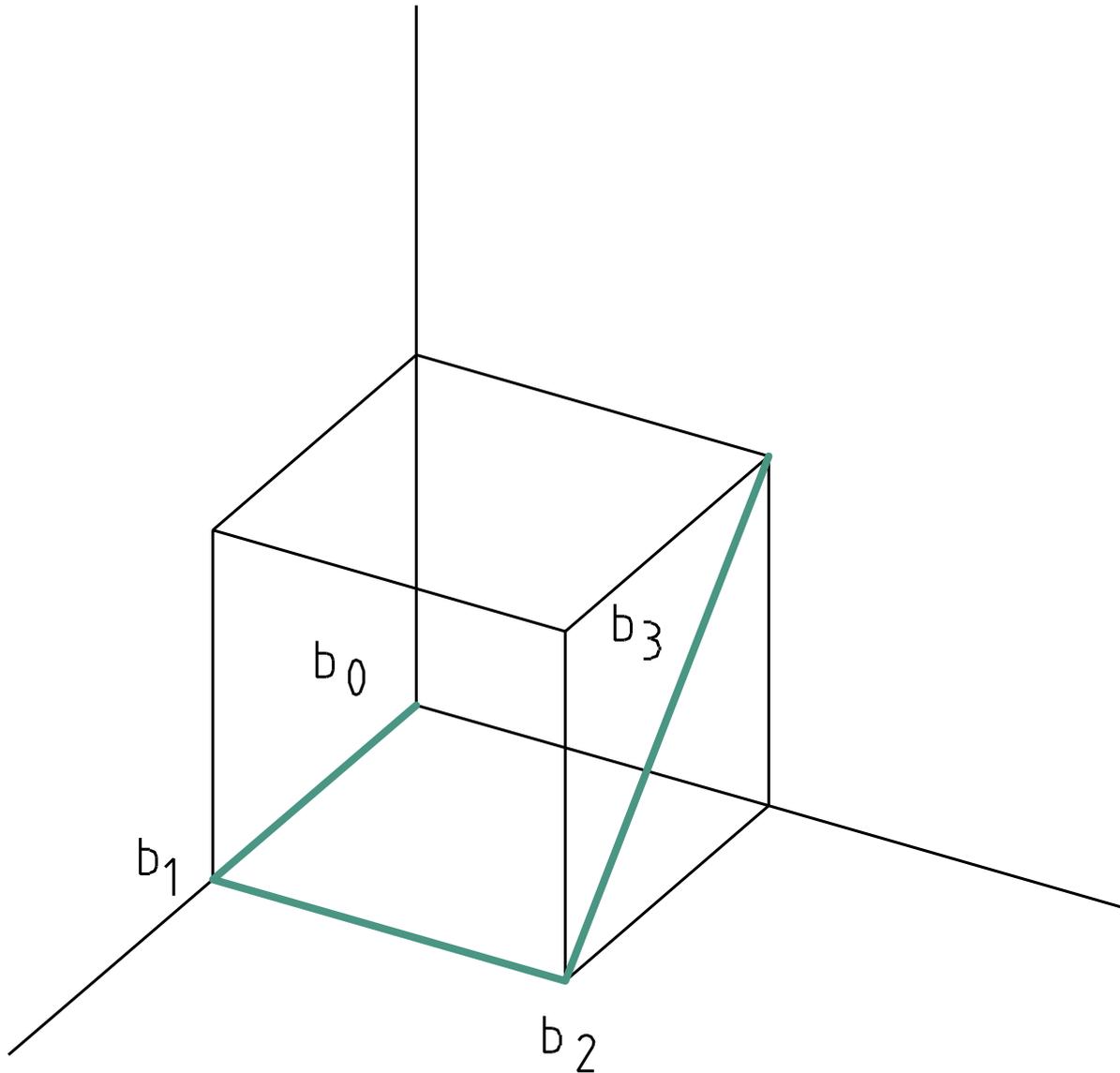


Abbildung 4.2: Konstruktion einer Bezierkurve

Bernstein Darstellung von Bezierkurven

Wir haben bisher einen rekursiven Algorithmus behandelt mit dem einzelne Punkte von Bezierkurven konstruiert werden können. Es ist aber gerade für eine Implementation am Computer notwendig eine explizite Darstellung - wie in Formel (4.4) des Einführungsbeispiels - zu haben. Dies kann man durch Verallgemeinerung von (4.4) erreichen. Dazu definieren wir *Bernstein Polynome* durch:

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \quad (4.6)$$

$\binom{n}{j}$ stellt in dieser Formel den Binomialkoeffizienten dar, der sich folgendermaßen berechnet:

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad \text{und} \quad n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1, \quad 0! = 1$$

Bernsteinpolynome haben eine Reihe mathematisch interessanter Eigenschaften (bez. Literatur vgl. z.B. G. FARIN, *Curves and Surfaces for CADG*, S. 33). In unserem Zusammenhang ist die

wichtigste, dass sich Bezierkurven mit Hilfe von Bernsteinpolynomen explizit darstellen lassen:

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \quad (4.7)$$

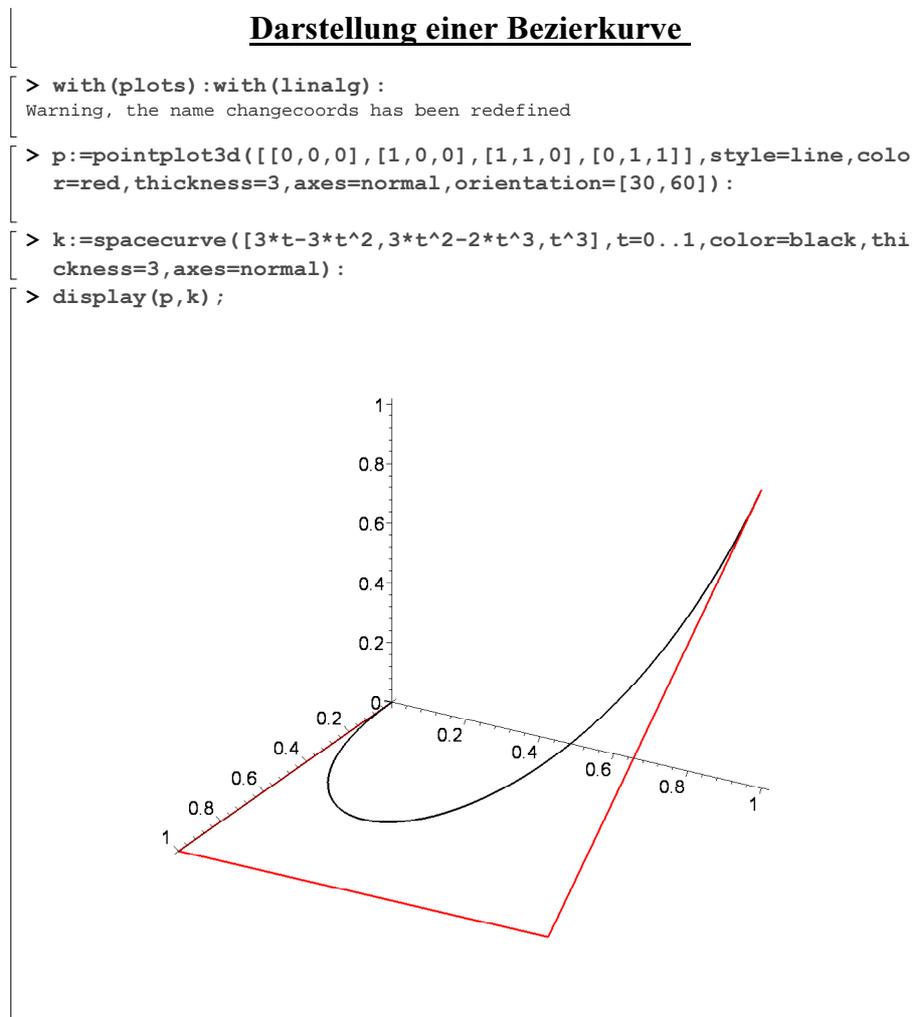


Abbildung 4.3: Darstellung der Bezierkurve von Beispiel 4.1.2

Beispiel 4.1.2 (Bernsteinpolynome 3. Ordnung) Man berechne eine explizite Darstellung der Bezierkurve 3. Ordnung von Beispiel 4.1.1.

Lösung: Wir bestimmen vorerst die Bernsteinpolynome 3. Ordnung $B_j^3(t)$, die wir dann in (4.7) einsetzen müssen:

$$B_0^3(t) = \binom{3}{0} t^0 (1-t)^3 = \frac{3!}{0!(3-0)!} (1-t)^3 = (1-t)^3$$

$$B_1^3(t) = \binom{3}{1} t^1 (1-t)^2 = 3t(1-t)^2$$

$$B_2^3(t) = \binom{3}{2} t^2 (1-t) = 3t^2(1-t)$$

$$B_3^3(t) = \binom{3}{3} t^3 (1-t)^0 = t^3$$

Einsetzen in (4.7) liefert die Bezierkurve:

$$\mathbf{b}^3(t) = \mathbf{b}_0 \cdot (1-t)^3 + \mathbf{b}_1 \cdot 3t(1-t)^2 + \mathbf{b}_2 \cdot 3t^2(1-t) + \mathbf{b}_3 \cdot t^3, \quad (4.8)$$

bzw. für die konkreten Kontrollpunkte von Beispiel 4.1.1:

$$\mathbf{b}^3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot (1-t)^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3t(1-t)^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 3t^2(1-t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t^3. \quad (4.9)$$

Rechnen wir die einzelnen Koordinatenfunktionen aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned} x &= 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) = 3t - 3t^2 \\ y &= 3t^2(1-t) + t^3 = 3t^2 - 2t^3 \\ z &= t^3 \end{aligned} \quad (4.10)$$

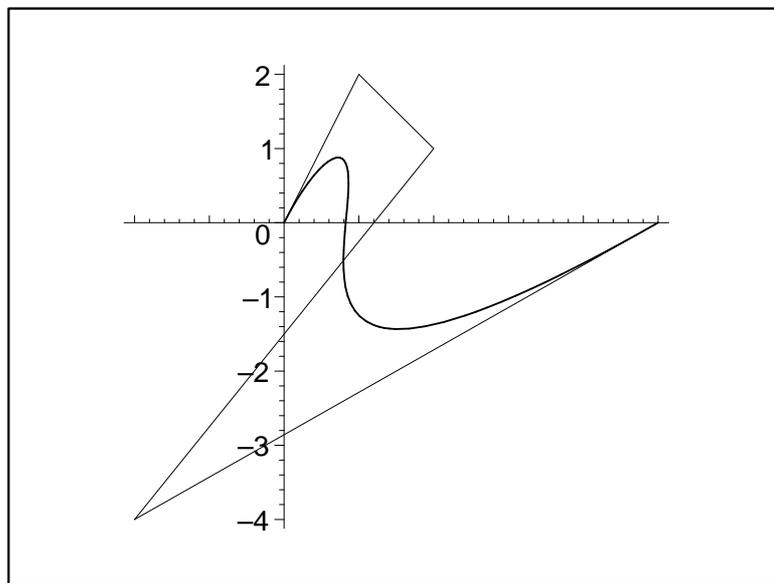


Abbildung 4.4: Bezierkurve 4.Ordnung

Abb. 4.4 zeigt eine ebene Bezierkurve zu den Kontrollpunkten $\mathbf{b}_0, b_1, b_2, b_3, b_4$. Die Kurve ist von vierter Ordnung. Hier sieht man auch bereits einen Nachteil von Bezierkurven: mit wachsender Anzahl der Kontrollpunkte steigt die Ordnung der Bezierkurve. Diesen Nachteil kann man wettmachen, indem man Kurven konstruiert, die stückweise aus Bezierkurven bestimmter Ordnung zusammengesetzt sind. Man kommt dadurch zu sogenannten *B-Splines* deren Verallgemeinerung die *NURBS (Non Uniform Rational B-Splines)* sind.

4.2 Bezierflächen

Bilineare Interpolation

Die lineare Interpolation in 4.1 hat die *einfachste* Kurve zwischen zwei Punkten geliefert. Bilineare Interpolation liefert die *einfachste* Fläche zwischen vier Punkten. Gegeben seien vier verschiedene Punkte $\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{11}$ in \mathbb{E}^3 . Die Menge der Punkte, für die gilt:

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{j=0}^1 \sum_{i=0}^1 \mathbf{b}_{ij} B_i^1(u) B_j^1(v) \quad (4.11)$$

ist ein *hyperbolisches Paraboloid* durch die vier Punkte $b_{i,j}$. Man kann die Gleichung 4.11 in Matrizenform schreiben

$$\mathbf{x}(u, v) = (1 - u, u) \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Die sich ergebende Fläche (4.12) wird die bilinear Interpolierende der vier Grundpunkte $\mathbf{b}_{i,j}$ genannt (Abb. 4.5). Genau wie die Bezierkurven durch Verallgemeinerung der linearen Interpo-

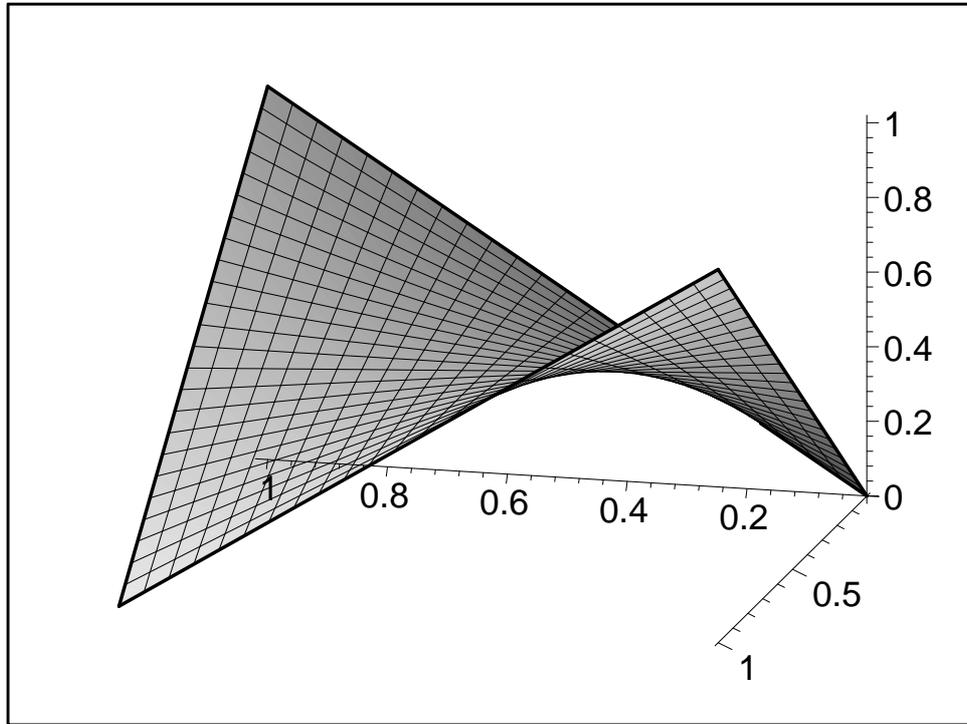


Abbildung 4.5: Hyperbolisches Paraboloid

lation zwischen zwei Punkten entstehen, so kann man Bezierflächen als die Verallgemeinerung der bilinearen Interpolation auffassen. Gegeben ist nun ein dreidimensionales Kontrollpunktenetz von $n \times m$ Punkten. Durch dieses Kontrollpunktenetz ist die Bezierfläche bestimmt.

Darstellung der Bezierflächen als Tensorprodukt

Unter der Vorstellung, dass eine beliebige Fläche Φ dadurch entsteht, dass eine Ausgangskurve über sie geführt wird und dabei die Gestalt ändert, können Bezierflächen in folgender Weise konstruiert werden: Sei die Ausgangskurve eine Bezierkurve vom Grad m

$$\mathbf{b}^m(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i B_i^m(u) \quad (4.13)$$

und jeder vorkommende Kontrollpunkt \mathbf{b}_i soll wieder eine Bezierkurve bestimmen.

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_i(v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_j^n(v) \quad (4.14)$$

Setzen wir nun (4.14) in (4.13) ein, so ergibt sich die Darstellung der entstehenden Bezierfläche mit

$$\mathbf{b}^{m,n}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_j^n(v) B_i^m(u) \quad (4.15)$$



Abbildung 4.6: Hyperbolisches Paraboloid

Beispiel 4.2.1 *Es soll die Darstellung (4.15) einer Bezierfläche mit Parameterkurven 3. Ordnung angegeben werden. Gegeben sei dazu das Netz der Kontrollpunkte:*

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} & \mathbf{b}_{02} & \mathbf{b}_{03} \\
 \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} & \mathbf{b}_{12} & \mathbf{b}_{13} \\
 \mathbf{b}_{20} & \mathbf{b}_{21} & \mathbf{b}_{22} & \mathbf{b}_{23} \\
 \mathbf{b}_{30} & \mathbf{b}_{31} & \mathbf{b}_{32} & \mathbf{b}_{33}
 \end{array}$$

Lösung: Wir erhalten durch Einsetzen in (4.15) und Ausrechnen ausführlich:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{b}^{3,3}(u, v) = & \mathbf{b}_{00}(1-v)^3(1-u)^3 + \mathbf{b}_{01}3v(1-v)^2(1-u)^3 + \mathbf{b}_{02}3v^2(1-v)(1-u)^3 + \\
 & \mathbf{b}_{03}v^3(1-u)^3 + \mathbf{b}_{10}(1-v)^3[3u(1-u)^2] + \mathbf{b}_{11}[3v(1-v)^2][3u(1-u)^2] + \\
 & \mathbf{b}_{12}3v^2(1-v)[3u(1-u)^2] + \mathbf{b}_{13}v^2[3u(1-u)^2] + \mathbf{b}_{20}(1-v)^3[3u^2(1-u)] + \\
 & \mathbf{b}_{21}[3v(1-v)^2][3u^2(1-u)] + \mathbf{b}_{22}3v^2(1-v)[3u^2(1-u)] + \mathbf{b}_{23}v^3[3u^2(1-u)] + \\
 & \mathbf{b}_{30}(1-v)^3u^3 + \mathbf{b}_{31}[3v(1-v)^2]u^3 + \mathbf{b}_{32}3v^2(1-v)u^3 + \mathbf{b}_{33}v^3u^3
 \end{aligned}$$

Wir konstruieren nun eine Bezierfläche mit 16 konkreten Kontrollpunkten:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{b}_{00} = (0, 0, 0) & \mathbf{b}_{01} = (1, 0, 1) & \mathbf{b}_{02} = (2, 0, 0) & \mathbf{b}_{03} = (3, 0, 1) \\
 \mathbf{b}_{10} = (0, 1, 1) & \mathbf{b}_{11} = (1, 1, 0) & \mathbf{b}_{12} = (2, 1, -1) & \mathbf{b}_{13} = (3, 1, 0) \\
 \mathbf{b}_{20} = (0, 2, 1) & \mathbf{b}_{21} = (1, 2, 0) & \mathbf{b}_{22} = (2, 2, 0) & \mathbf{b}_{23} = (3, 2, 1) \\
 \mathbf{b}_{30} = (0, 3, 0) & \mathbf{b}_{31} = (1, 3, 1) & \mathbf{b}_{32} = (2, 3, 1) & \mathbf{b}_{33} = (3, 3, 0)
 \end{array}$$

Die explizite Berechnung der Flächengleichung und der dazugehörige Plot wird im folgenden Maple Notebook gezeigt.

```
> with(plots):
```

Eingabe der Tensorprodukt Darstellung der Bezierfläche (Skriptum : Formel (4.15))

```
> P:=sum(sum(b[i,j]*binomial(m,i)*u^i*(1-u)^(m-i)*binomial(n,j)*v^j*(1-v)^(n-j),j=0..n),i=0..m);
```

$$P := \sum_{i=0}^m \left(\sum_{j=0}^n b_{i,j} \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \binom{n}{j} v^j (1-v)^{n-j} \right)$$

Beispiel einer Bezierfläche mit 16 Knotenpunkten:

$n=m=3 \rightarrow (i=0..3, j=0..3)!$

```
> P3:=sum(sum(b[i,j]*binomial(3,i)*u^i*(1-u)^(3-i)*binomial(3,j)*v^j*(1-v)^(3-j),i=0..3),j=0..3);
```

$$\begin{aligned} P_3 := & b_{0,0} (1-u)^3 (1-v)^3 + 3 b_{1,0} u (1-u)^2 (1-v)^3 + 3 b_{2,0} u^2 (1-u) (1-v)^3 \\ & + b_{3,0} u^3 (1-v)^3 + 3 b_{0,1} (1-u)^3 v (1-v)^2 + 9 b_{1,1} u (1-u)^2 v (1-v)^2 \\ & + 9 b_{2,1} u^2 (1-u) v (1-v)^2 + 3 b_{3,1} u^3 v (1-v)^2 + 3 b_{0,2} (1-u)^3 v^2 (1-v) \\ & + 9 b_{1,2} u (1-u)^2 v^2 (1-v) + 9 b_{2,2} u^2 (1-u) v^2 (1-v) + 3 b_{3,2} u^3 v^2 (1-v) \\ & + b_{0,3} (1-u)^3 v^3 + 3 b_{1,3} u (1-u)^2 v^3 + 3 b_{2,3} u^2 (1-u) v^3 + b_{3,3} u^3 v^3 \end{aligned}$$

Einsetzen der gegebenen Kontrollpunkte (Skriptum Beispiel 4.3) (in Komponentenform)

```
> P_x:=simplify((subs(b[0,0]=0,b[1,0]=0,b[2,0]=0,b[3,0]=0, b[0,1]=1,
b[1,1]=1, b[2,1]=1, b[3,1]=1,b[0,2]=2, b[1,2]=2, b[2,2]=2, b[3,2]=2,
b[0,3]=3, b[1,3]=3, b[2,3]=3, b[3,3]=3, P3)));
```

$$P_x := 3v$$

```
> P_y:=simplify((subs(b[0,0]=0,b[1,0]=1,b[2,0]=2,b[3,0]=3,b[0,1]=0,
b[1,1]=1,b[2,1]=2,b[3,1]=3,b[0,2]=0,b[1,2]=1,b[2,2]=2,b[3,2]=3,
b[0,3]=0,b[1,3]=1,b[2,3]=2,b[3,3]=3,P3)));
```

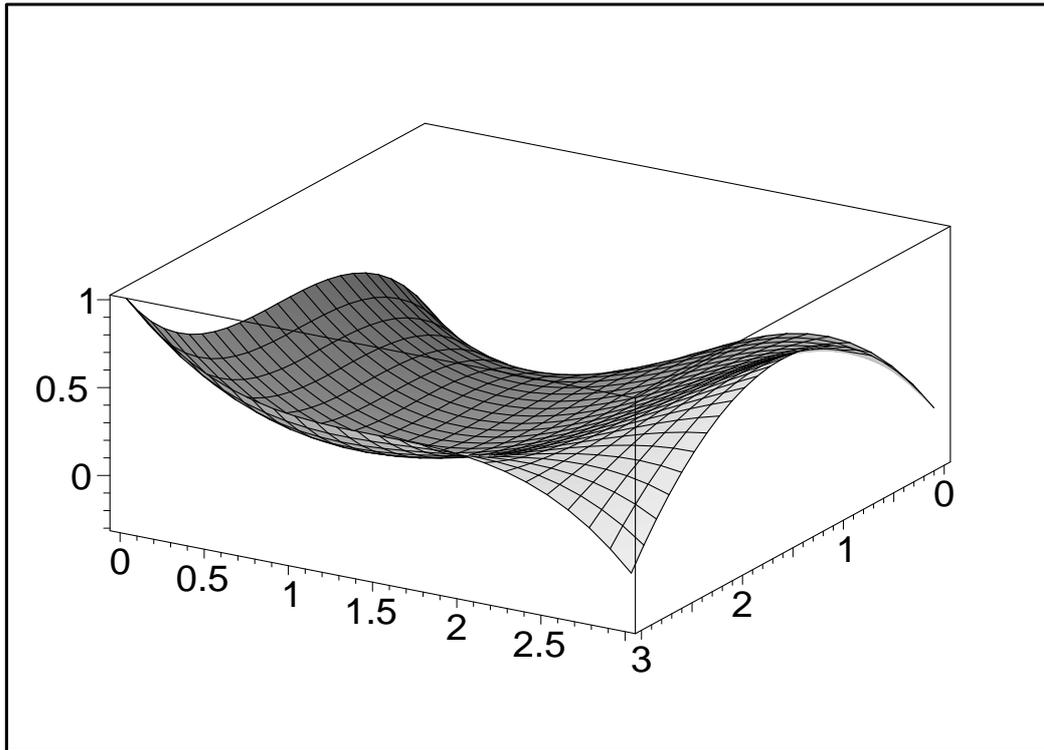
$$P_y := 3u$$

```
> P_z:=simplify((subs(b[0,0]=0,b[1,0]=-1,b[2,0]=1,b[3,0]=0,b[0,1]=1,
b[1,1]=0,b[2,1]=0,b[3,1]=1,b[0,2]=0,b[1,2]=-1,b[2,2]=0,b[3,2]=1,
b[0,3]=1,b[1,3]=0,b[2,3]=1,b[3,3]=0,P3)));
```

$$\begin{aligned} P_z := & -6u^3 + 9u^2 - 6v^2 + 4v^3 + 3v - 12u^2v^3 - 18u^2v + 27u^2v^2 + 18u^3v - 24u^3v^2 \\ & + 8u^3v^3 - 3u \end{aligned}$$

Plot der Bezierfläche:

```
> plot3d([P_x,P_y,P_z],u=0..1,v=0..1,axes=boxed,scaling=constrained,
> orientation=[31,70]);
```

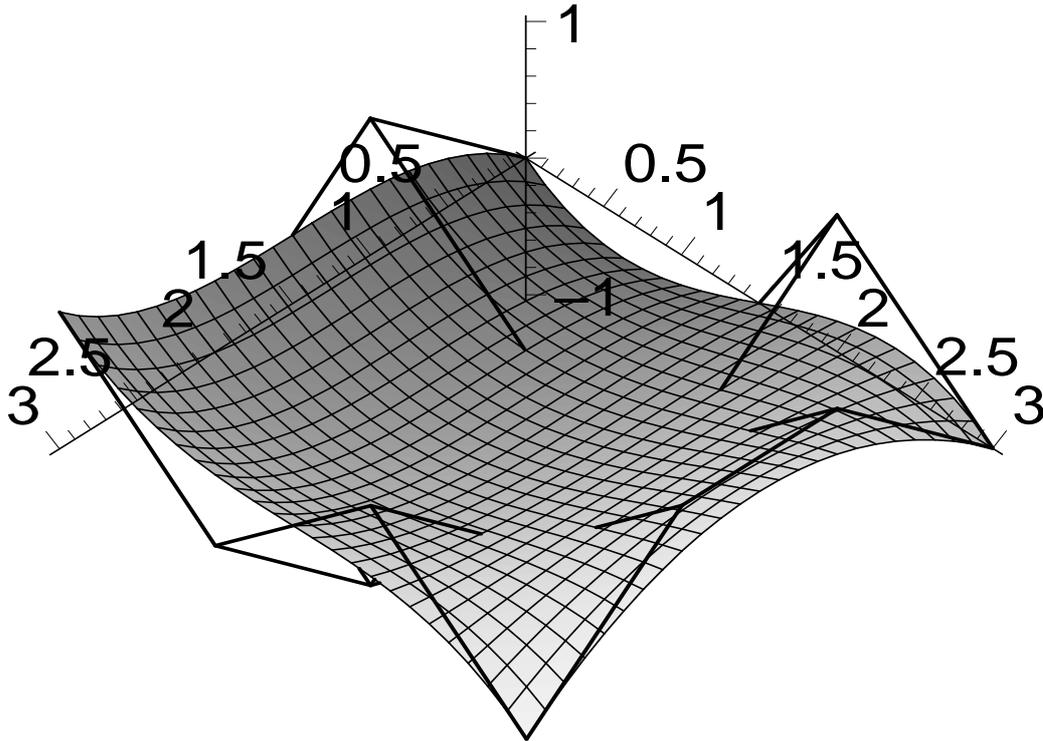


Um die Interaktion mit den Kontrollpunkten zu zeigen plotten wir auch noch das Kontrollpunktenetz:

```

> u0:=pointplot3d([[0,0,0],[0,1,-1],[0,2,1],[0,3,0]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> u1:=pointplot3d([[1,0,1],[1,1,0],[1,2,0],[1,3,1]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> u2:=pointplot3d([[2,0,0],[2,1,-1],[2,2,0],[2,3,1]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> u3:=pointplot3d([[3,0,1],[3,1,0],[3,2,1],[3,3,0]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> v0:=pointplot3d([[0,0,0],[1,0,1],[2,0,0],[3,0,1]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> v1:=pointplot3d([[0,1,-1],[1,1,0],[2,1,-1],[3,1,0]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> v2:=pointplot3d([[0,2,1],[1,2,0],[2,2,0],[3,2,1]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> v3:=pointplot3d([[0,3,0],[1,3,1],[2,3,1],[3,3,0]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> f1:=plot3d([P_x,P_y,P_z],u=0..1,v=0..1,axes=boxed,
> scaling=constrained):
> display3d({u0,u1,u2,u3,v0,v1,v2,v3,f1},
> scaling=constrained,axes=normal);

```

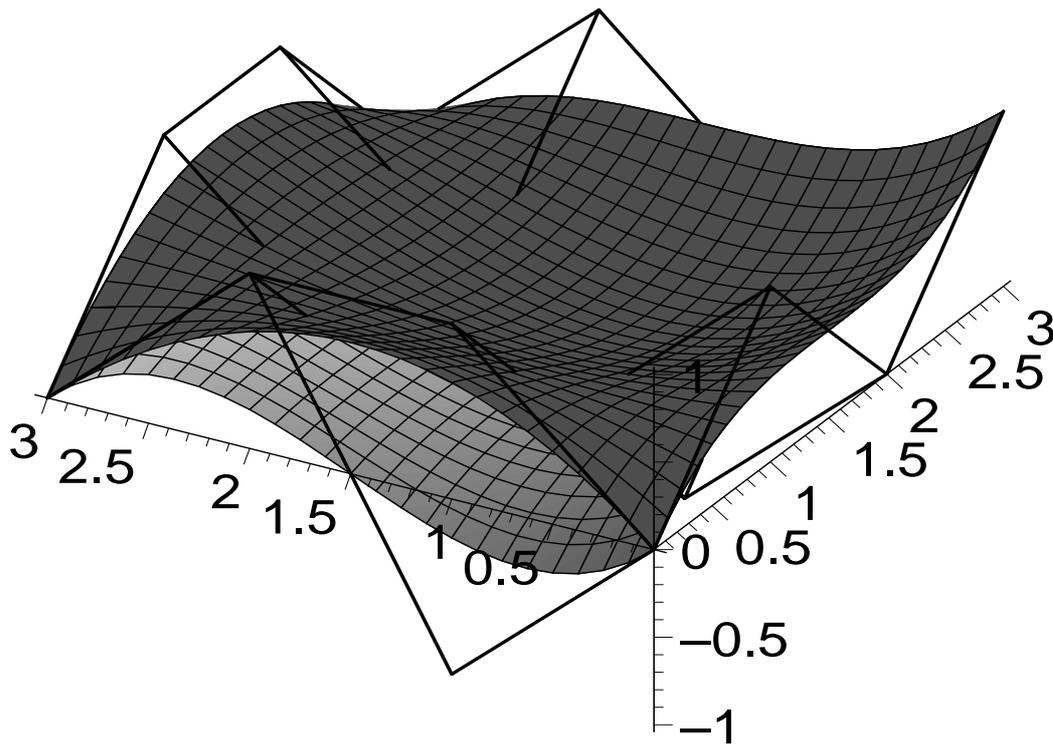


Flächendesign ist nun durch Veränderung der Kontrollstruktur möglich: zum Beispiel der Punkt b_{01} wird von $(0,1,-1)$ auf $(0,1,1)$ verändert:

```
> P_z1:=simplify((subs(b[0,0]=0,b[1,0]=1,b[2,0]=1,b[3,0]=0,b[0,1]=1,
> b[1,1]=0,b[2,1]=0,b[3,1]=1,b[0,2]=0,b[1,2]=-1,b[2,2]=0,b[3,2]=1,
> b[0,3]=1,b[1,3]=0,b[2,3]=1,b[3,3]=0,P3)));
```

$$P_{z1} := -3u^2 - 6v^2 + 4v^3 + 3v + 18uv^2 - 6uv^3 + 18u^2v - 9u^2v^2 - 6u^3v^2 + 2u^3v^3 + 3u - 18uv$$

```
> u01:=pointplot3d([[0,0,0],[0,1,1],[0,2,1],[0,3,0]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> v11:=pointplot3d([[0,1,1],[1,1,0],[2,1,-1],[3,1,0]],thickness=3,
> style=line,color=black):
> f11:=plot3d([P_x,P_y,P_z1],u=0..1,v=0..1,axes=boxed,
> scaling=constrained,color=red):
> display3d({u0,u01,u1,u2,u3,v0,v11,v2,v3,f11,f1
> },scaling=constrained,axes=normal,orientation=[-150,60]);
```



4.3 NURBS und Modeling mit NURBS

Bezierkurven und Bezierflächen waren historisch die ersten Freiformwerkzeuge im CAD. Sie sind einfach zu behandeln, haben aber einige gravierende Nachteile. Darunter fallen vor allem der hohe Grad der entstehenden Bezierkurve bzw. Bezierfläche, wenn die Anzahl der Kontrollpunkte hoch ist. Man kann diesen Nachteil durch Aneinanderstückeln von Bezierkurven niedriger Ordnung aufheben. Beim Zusammenfügen ist aber sehr genau auf den Übergang von einem Kurvenstück zum nächsten zu achten. Als minimale Forderung wird man die Gleichheit der Tangente im Endpunkt der einen und im Anfangspunkt der anderen Kurve beachten. Für praktische Anwendung wird Tangentenübergang aber meist nicht genug sein. Zusammengesetzte Bezierkurven heißen *B-Splines*.

Abbildung 4.7 zeigt von oben nach unten:

1. Zwei aneinandergestückelte Bezierkurven, die nur Endpunkt und Anfangspunkt gemeinsam haben. Die Kurven sind an der Anschlussstelle zwar stetig (d.h. es gibt kein Loch zwischen den Kurven), aber nicht differenzierbar (die Tangente stimmt nicht überein).
2. Das mittlere Bild zeigt zwei zusammengesetzte Bezierkurven mit Tangentenübergang.
3. Das untere Bild zeigt drei B-Splinekurven, die jeweils aus Bezierkurven unterschiedlicher Ordnungen zusammengesetzt sind. Die strichpunktierte Kurve besteht aus Stücken von Kurven 2. Ordnung (Parabeln). Die durchgezogene Kurve ist ein B-Spline der Ordnung 3 und die strichlierte Kurve ist ein B-Spline der Ordnung 5. Offensichtlich ist die Form der Kurve stark durch die vorgegebene Ordnung des B-Spline abhängig. Grundsätzlich gilt, je niedriger die Ordnung, desto näher ist die Splinekurve zum Kontrollpolygon. Die meisten CAD Systeme bieten die Möglichkeit des Einstellens einer Kurvenordnung an¹. Wenn

¹Es muss vermerkt werden, dass der Begriff Ordnung einer B-Splinekurve in der Praxis nicht einheitlich gehandhabt wird. Manche CAD-Systeme verwenden den Begriff Ordnung als: mathematische Ordnung+1.

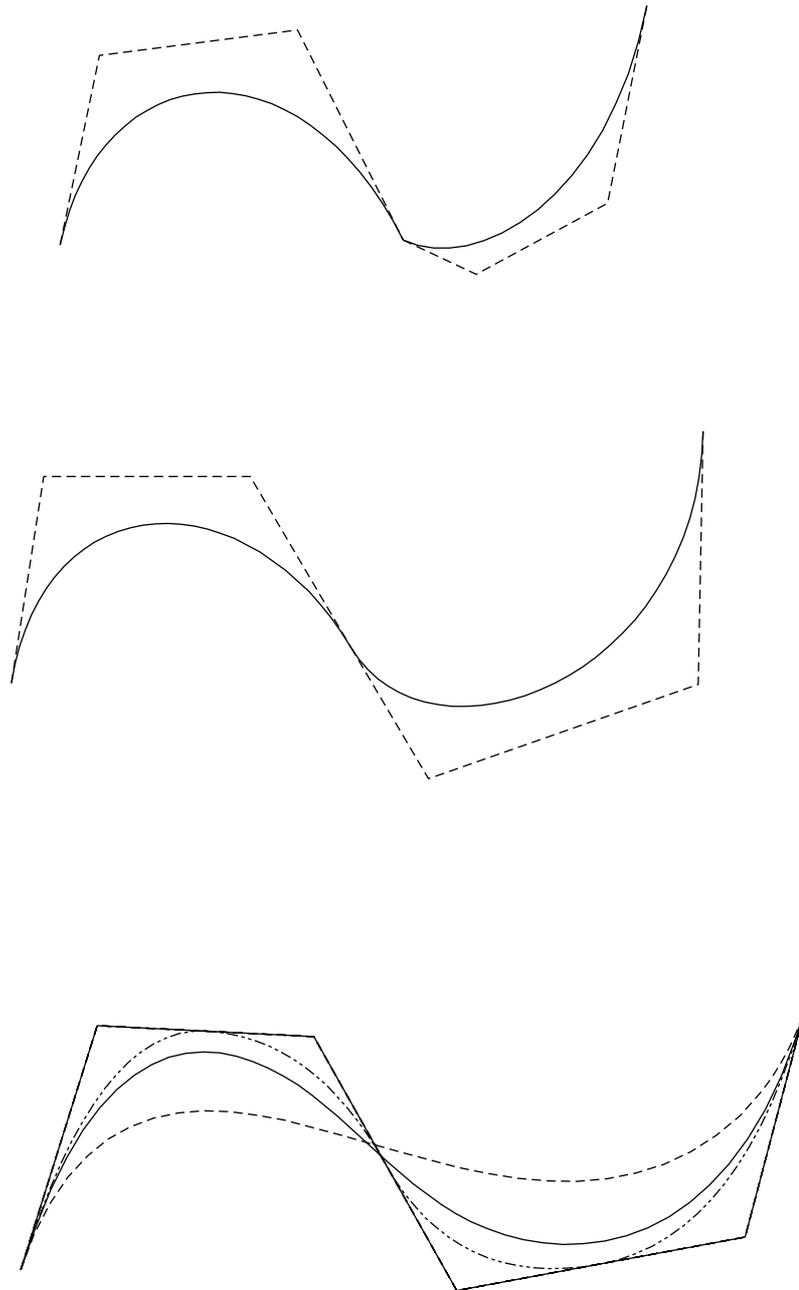


Abbildung 4.7: B-Spline Kurven

man diese Ordnung einstellt, dann sollte man bedenken, dass man dann mindestens einen Kontrollpunkt mehr angeben muss als die Ordnung ist; sonst besteht keine Einschränkung. Warum man einen Kontrollpunkt mehr vorgeben muss als die Ordnung ist unmittelbar aus dem Casteljau Algorithmus klar.

Wir fassen zusammen und listen noch einige weitere wichtige Eigenschaften von B-Splines:

1. B-Splinekurven sind aus Stücken polynomialer Kurven (ihre mathematische Darstellung ist ein Polynom) von einer fester Ordnung p zusammengesetzt.
2. Je niedriger die Ordnung desto näher ist die Kurve dem Kontrollpolygon.
3. Lokale Veränderbarkeit: die Veränderung eines Kontrollpunktes wirkt sich nur auf den

unmittelbar in der Nähe gelegenen Teil der Kurve aus (Bei der Änderung eines Kontrollpunktes einer Bezierkurve ändert sich die ganze Kurve!)

4. Affine Invarianz.
5. Bezierkurven sind ein Sonderfall der B-Splines.

Zur Konstruktion von B-Spline Kurven braucht man mehr Information (was übrigens von den meisten CAD-Systemen unterdrückt wird) und es steht eine wesentlich kompliziertere mathematische Theorie dahinter². Die obigen zusätzlichen Eigenschaften zu den Bezierkurven-eigenschaften rechtfertigen aber den zusätzlichen rechnerischen Aufwand (den der CAD Benutzer ohnedies nicht spürt).

Die B-Splines haben aber noch einen gravierenden Nachteil: viele bekannte und in CAD Systemen verwendete Kurven, wie z.B. Kreise und Ellipsen können durch sie nicht dargestellt werden. Abbildung 4.8 zeigt die Annäherung eines Kreises durch B-Splines von der Ordnung 2,3,5,6. Man könnte die Ordnung noch beliebig hinaufschrauben und man würde keinen Kreis bekommen; außerdem ist eine Kurve von der Ordnung 7 mathematisch bereits einigermaßen kompliziert. Um diese Kreise auch als stückweise Splines darzustellen und dadurch als Aus-

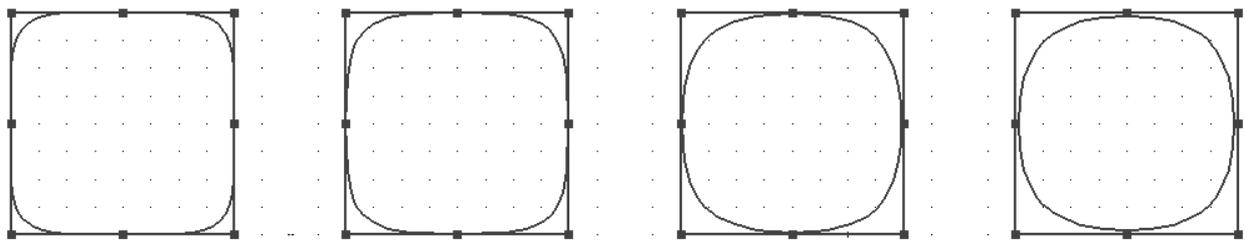


Abbildung 4.8: B-Spline Kurven zur Kreisannäherung

gangskurven für ein Kurvendesign zu bekommen, braucht man noch einen Verallgemeinerungsschritt. Diese Verallgemeinerung sind die NURBS (**N**on-**U**niform **R**ational **B**-Splines). Mit diesen Kurventypen können nun die meisten klassischen Kurven wie Kreise, Ellipsen, Hyperbeln in ein und demselben mathematischen Rahmen dargestellt werden. Es würde den Rahmen dieser Vorlesung sprengen die mathematische Darstellung und alle zusätzlichen Eigenschaften von NURBS zu besprechen. Aber auf zwei in manchen CAD Systemen (z.B. RHINO) bereits implementierte (Design)Eigenschaft sei zum Schluss noch hingewiesen: Bei NURBS ist jeder Punkt des Kontrollpolygons noch zusätzlich mit einem Gewicht versehen. Je höher das Gewicht eines Kontrollpunktes angesetzt wird, desto mehr wird die Kurve von ihm angezogen. Diese Eigenschaft ist in den beiden Kurven in Abbildung 4.9 gezeigt. Bei der linken Kurve sind alle Kontrollpunkte gleich gewichtet, während auf der rechten Kurve der Kontrollpunkt K_3 das 30-fache Gewicht der anderen Punkte hat. Es ist offensichtlich, dass man durch die Gewichte noch eine zusätzliche (lokale) Designmöglichkeit bekommt. Die zweite Eigenschaft ist, zusätzliche Kontrollpunkte einbauen zu können, ohne die Ordnung und die Form der Kurve zu ändern. Dies wird in den Abbildungen 4.10 und 4.11 gezeigt. Wir gehen aus von einem Kreis mit seinen Kontrollpunkten. Abbildung 4.10 zeigt links einen Kreis mit der minimalen Anzahl von Kontrollpunkten. Rechts wurde ein Kontrollpunkt verändert. In Abbildung 4.11 wurden Kontrollpunkte hinzugefügt und die rechte Kurve zeigt die Veränderung durch Ziehen an einem

²Der/die interessierte StudentIn sei bezüglich der mathematischen Hintergründe auf die Vorlesung "Geometrische Grundlagen des CAD" verwiesen. Dort werden die mathematische Darstellung dieser Kurventypen und auch Beweise für die obigen Eigenschaften gebracht.

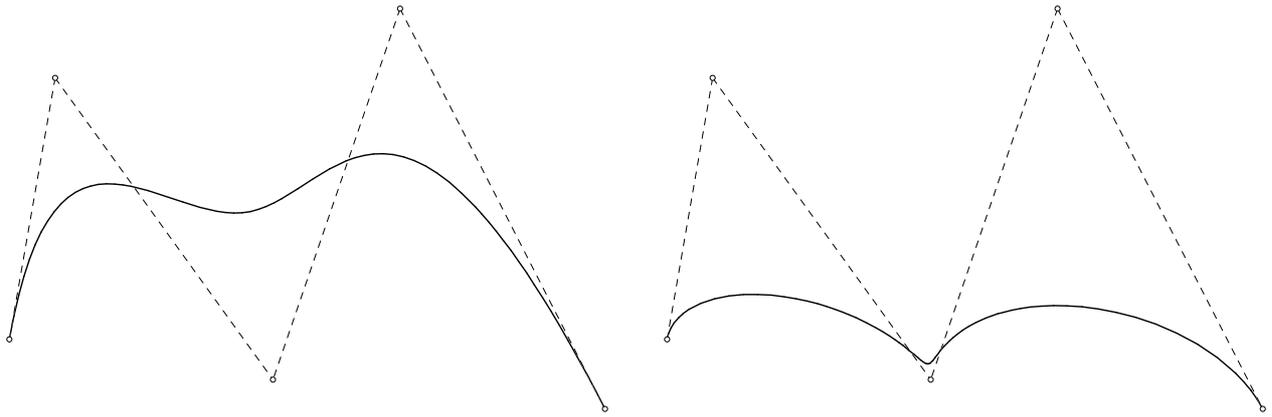


Abbildung 4.9: Gewichte von Kontrollpunkten

Kontrollpunkt. Man beachte die geänderte Auswirkung der Veränderung des Kontrollpunktes auf die Form der neuen Kurve.

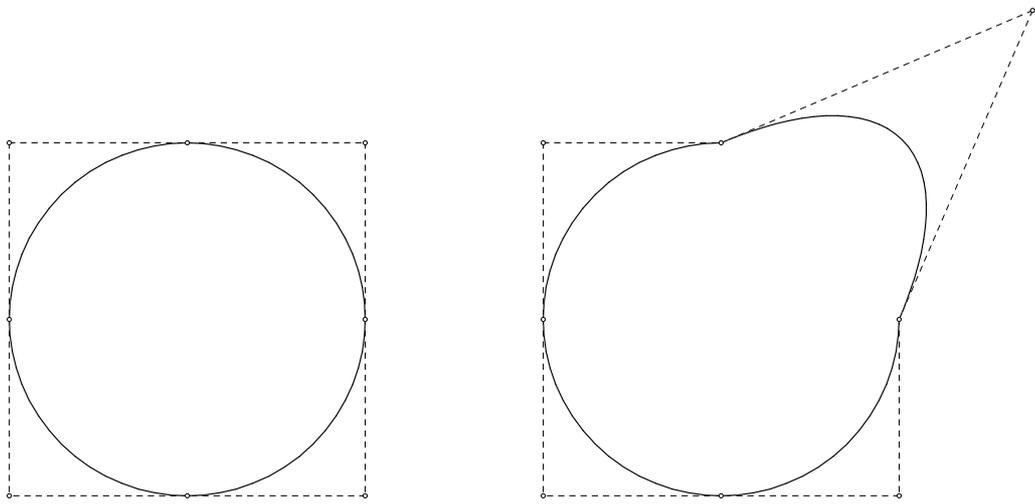


Abbildung 4.10: Minimale Kontrollpunkte eines KreisNURBS

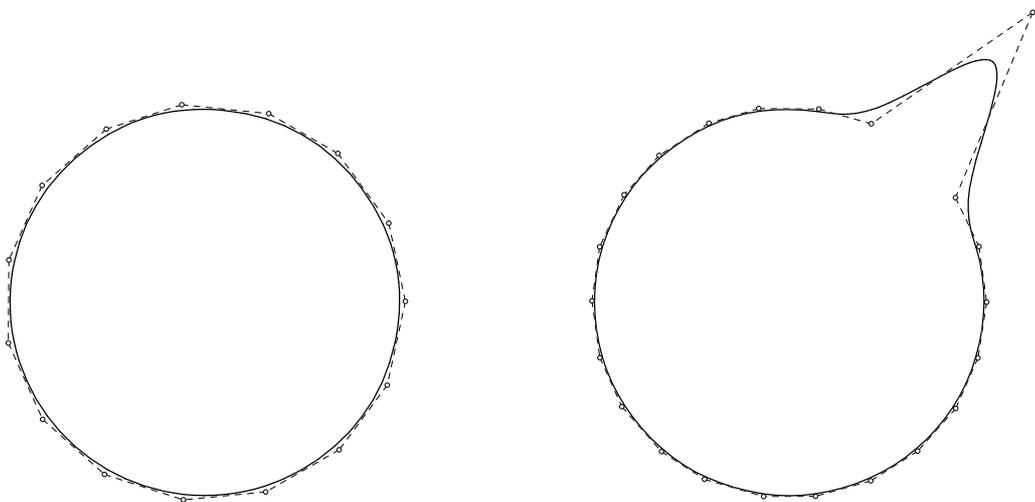


Abbildung 4.11: Hinzufügen von Kontrollpunkten

Analog zur Konstruktion der Bezierflächen als Tensorprodukte von Bezierkurven können auch B-Splineflächen und NURBS-Flächen konstruiert werden. Da die mathematische Darstellung dieser Freiformflächen schon einigermaßen kompliziert ist wird darauf hier verzichtet. In das Bauwesen und in die Architektur haben die Freiformflächen aber bereits seit einiger Zeit Einzug gehalten. Dies mögen die beiden abschließenden Abbildungen zeigen:



Abbildung 4.12: Freiformfläche zur Überdachung der Ankunftshalle Incheon Airport, Seoul Korea

4.4 Übersichtsfragen

1. Welche Darstellungsformen gibt es für Kurven, Flächen?
2. Welche Darstellungsformen sind für die Computergraphik günstig?
3. Was versteht man unter linearer Interpolation?
4. Was ist eine Bezierkurve?
5. Welche geometrische Eigenschaften haben Bezierkurven?
6. Wie funktioniert der De Casteleau Algorithmus?
7. Wozu braucht man ein Kontrollpolygon und Kontrollpunkte?
8. Was ist ein B-Spline?
9. Welche zusätzlichen Eigenschaften haben B-Splines?
10. Welche Eigenschaften haben NURBS?



Abbildung 4.13: Konstruktive Ausführung des Daches Inchon Airport, Seoul Korea

11. Was wird durch Veränderung von Gewichten bewirkt?
12. Was bewirkt das Einfügen von zusätzlichen Kontrollpunkten?

Kapitel 5

Differentialgeometrische Eigenschaften von Kurven und Flächen

Ziel dieses Abschnittes ist es, eine kurze Einführung in die Anfangsgründe der mathematischen Theorie der Raumkurven und Flächen zu geben. Die Resultate werden wir später bei verschiedensten konstruktiven Anwendungen benötigen. Bezüglich einer genaueren Behandlung sei vor allem auf Brauner, Konstruktive Geometrie, Kapitel 7 bzw. Bohne/Klix, Geometrie, Grundlagen für Anwendungen Kapitel 6 verwiesen.

5.1 Raumkurven

Eine Kurve c heißt eine *Raumkurve*, wenn sie nicht ganz in einer Ebene liegt. Beispiele solcher Raumkurven haben wir bei den Schnittkurven zweier Flächen kennengelernt. Zur mathematischen Darstellung benutzt man zweckmäßig eine *Parameterdarstellung*, die man oft vektoriell schreibt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) \dots \{x = x(t), y = y(t), z = z(t); t \in I \subset \mathbb{R}\} \quad (5.1)$$

Ein Beispiel für eine Raumkurve ist:

$$\mathbf{x}(t) = \{x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3\} \quad (5.2)$$

Diese Raumkurve wird unsere Beispielskurve in diesem Kapitel sein. Sie ist in den Abb. 5.1-5.3 in Grundriss, Aufriss und Kreuzriss dargestellt. Abbildung 5.4 zeigt eine axonometrische

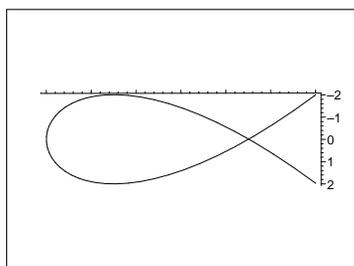


Abbildung 5.1: Grundriss

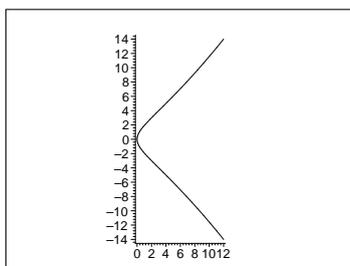


Abbildung 5.2: Aufriss

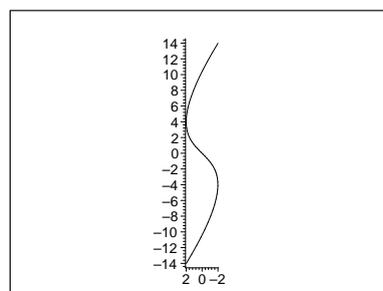


Abbildung 5.3: Kreuzriss

Darstellung der Kurve.

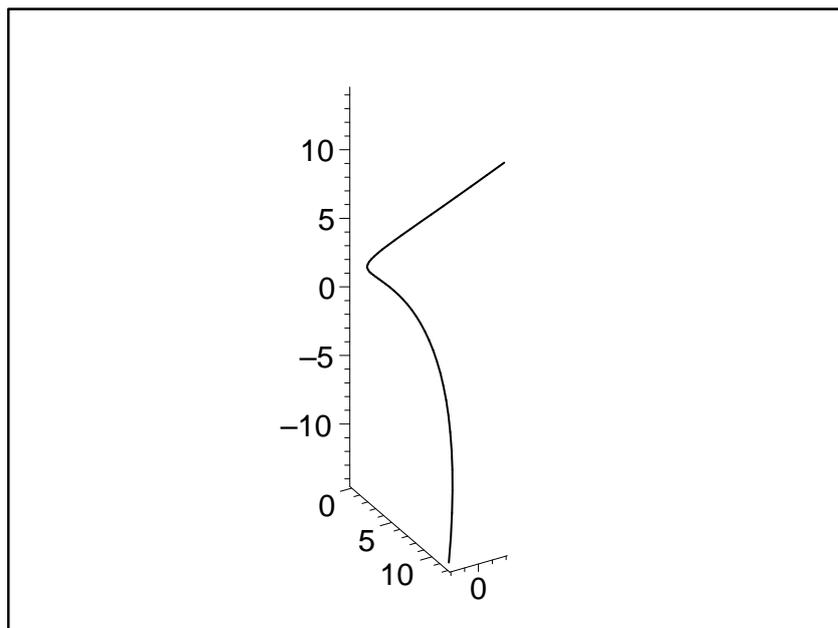


Abbildung 5.4: Raumkurve

Tangenten an Raumkurven:

Definition 5.1.1 Eine Tangente t durch einen Punkt P eines Kurvenstückes k ist die Grenzlage von Sehengeraden PP_1 , wenn P_1 auf k gegen P läuft (Abb. 5.5).

In der Darstellung (5.1) ist der Richtungsvektor der Tangente der erste Ableitungsvektor, also $\frac{d\mathbf{x}}{dt} := \dot{\mathbf{x}}$. Damit lautet die Vektordarstellung der Tangente in Punkte $P(t_0) \in k$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(t_0) + \lambda \dot{\mathbf{x}}(t_0) \tag{5.3}$$

Wenden wir dieses konkret an der Beispielskurve (5.2) an für $t_0 = 1$. Wir erhalten: $\mathbf{x}(t_0) = \{2, 3, 4\}$, $\dot{\mathbf{x}}(t) = \{\dot{x} = 3 - 3t^2, \dot{y} = 6t, \dot{z} = 3 + 3t^2\}$ und $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \{\dot{x} = 0, \dot{y} = 6, \dot{z} = 6\}$ und damit insgesamt:

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

t existiert nur dann, wenn $\dot{\mathbf{x}}(t_0) \neq \mathbf{0}$ ist. Ein Punkt mit $\{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\} \neq \{0, 0, 0\}$ heißt ein *regulärer Punkt* der Raumkurve k . Ein Punkt $P(t_0)$ mit $\dot{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{0}$ heißt ein *singulärer Punkt* der Raumkurve k .

Schmiegebene:

Definition 5.1.2 Eine Ebene σ durch eine Tangente t in einem Punkt P eines nicht geradlinigen Kurvenstückes k heißt Schmiegebene von k in P zur Tangente t , wenn sie Grenzlage von Ebenen tP_1 ist und P_1 auf k gegen P läuft, so dass $t = \lim_{P_1 \rightarrow P} PP_1$ gilt (Abb. 5.6).

Man kann zeigen, dass σ existiert, wenn $\mathbf{x}(t)$ mindestens zweimal stetig differenzierbar und ausserdem P kein Wendepunkt ist d.h. wenn $\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$ in $P(t_0)$ gilt. Die Schmiegebene hat die Darstellung

$$\sigma \dots |(\mathbf{X} - \mathbf{x}(t_0), \dot{\mathbf{x}}(t_0), \ddot{\mathbf{x}}(t_0))| = 0 \tag{5.5}$$

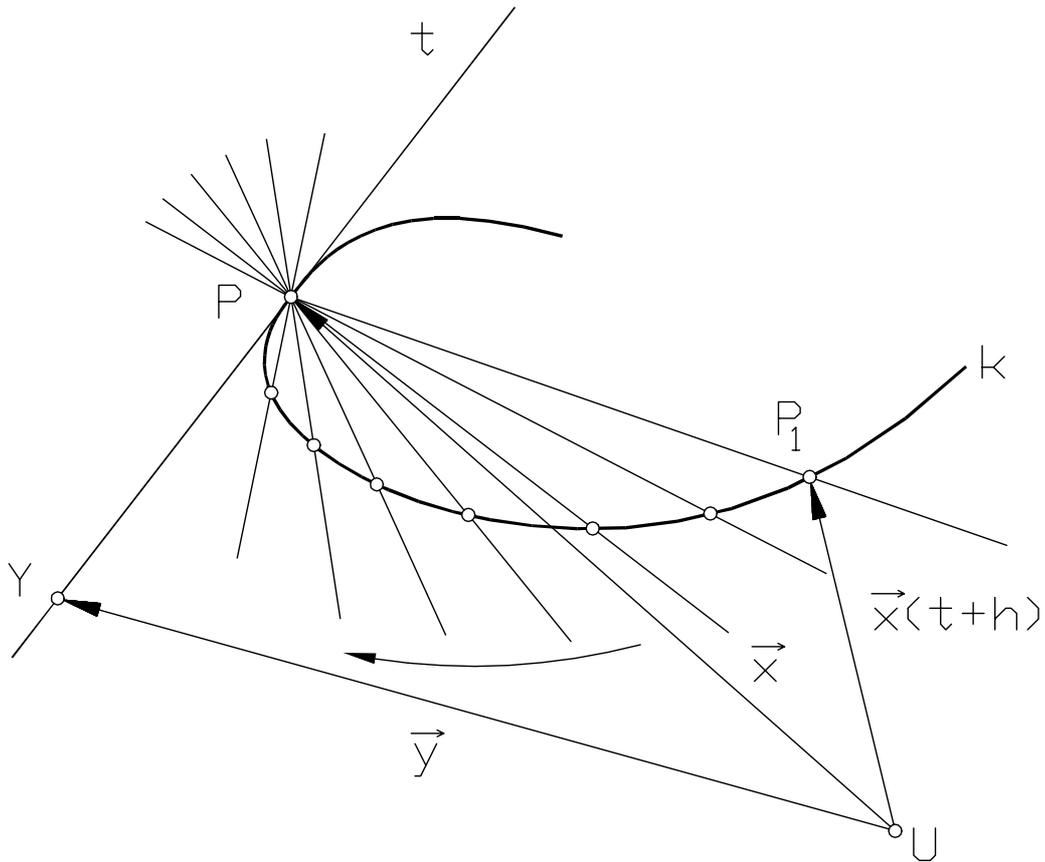


Abbildung 5.5: Tangente

Für die Beispielskurve (5.2) bedeutet dies: $\ddot{\mathbf{x}} = \{\ddot{x} = -6t, \ddot{y} = 6, \ddot{z} = 6t\}$. Rechnen wir die Schmiegeebene für $t = 1$ aus, dann ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} X - 2 & 0 & -6 \\ Y - 3 & 6 & 6 \\ Z - 4 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 \tag{5.6}$$

Ausrechnen liefert: $Z - Y = 1$.

Begleitendes Dreiein der Raumkurve

Durch einen Punkt P der Raumkurve gibt es ein ganzes Stahlbüschel von Normalen auf die Tangente t . Unter diesen Normalen ist jene ausgezeichnet, die in der Schmiegeebene σ liegt: sie heißt *Hauptnormale* h . Ergänzt man nun t und h durch eine weitere Normale b auf t so, dass $\{t, h, b\}$ Achsen eines kartesischen Rechtskoordinatensystems sind, so bezeichnet man $\{t, n, b\}$ als *begleitendes Dreiein* der Raumkurve c (Abb.5.7). Die Gerade b heißt die *Binormale* von c in P . Die Basisvektoren des begleitenden Dreieins erhält man durch:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\mathbf{t}}{|\mathbf{t}|} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|} \end{aligned} \tag{5.7}$$

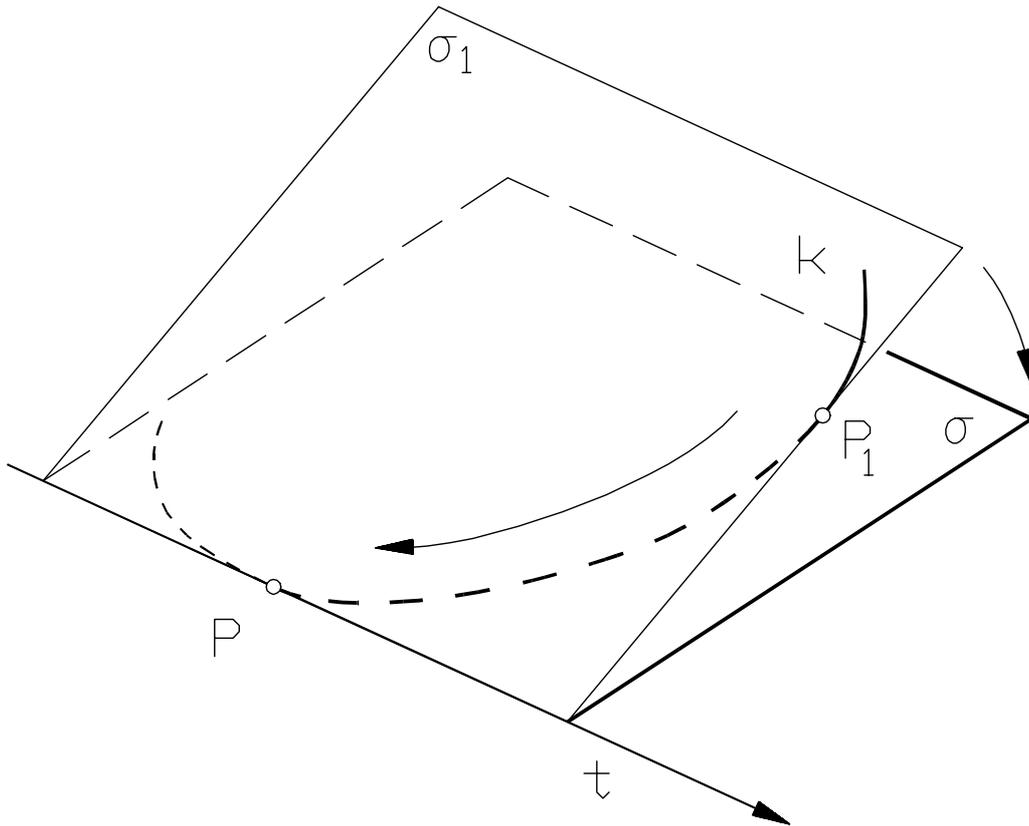


Abbildung 5.6: Schmiegebene

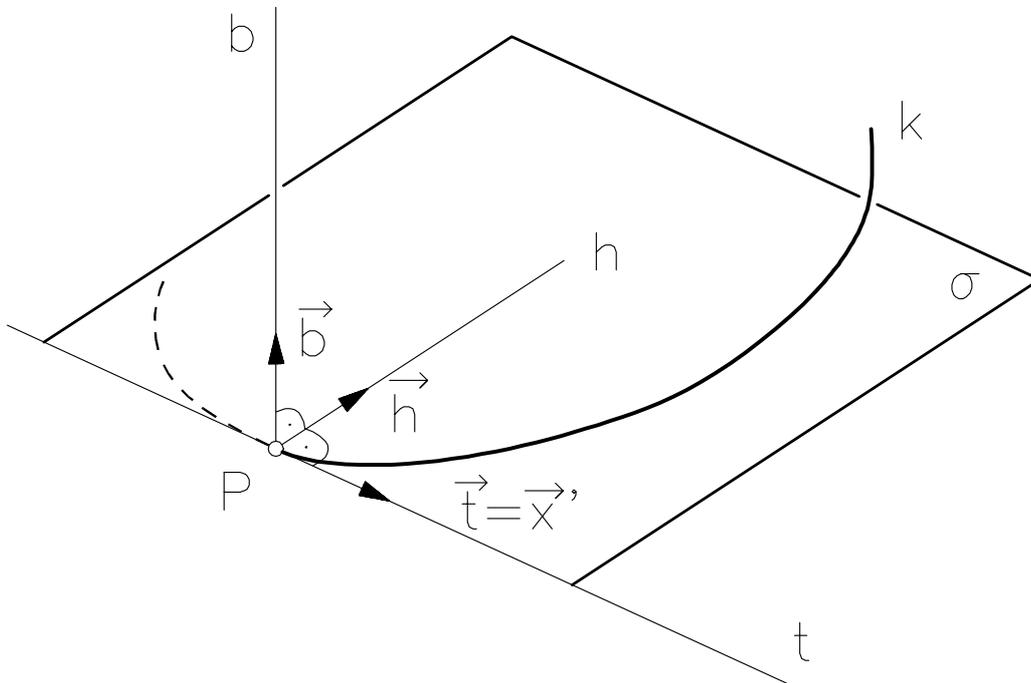


Abbildung 5.7: Begleitendes Dreibein

Krümmungskreis:

Wir denken uns in der Ebene σ_1 einen Kreis c_1 gezeichnet, der k in P berührt und durch P_1 geht; c_1 ist durch einen Punkt P samt Tangente t und einen weiteren Punkt P_1 eindeutig

bestimmt (Abb. 5.8). Der Grenzkreis $\lim_{P_1 \rightarrow P} c_1 =: c^*$ heißt der *Krümmungskreis* von k in

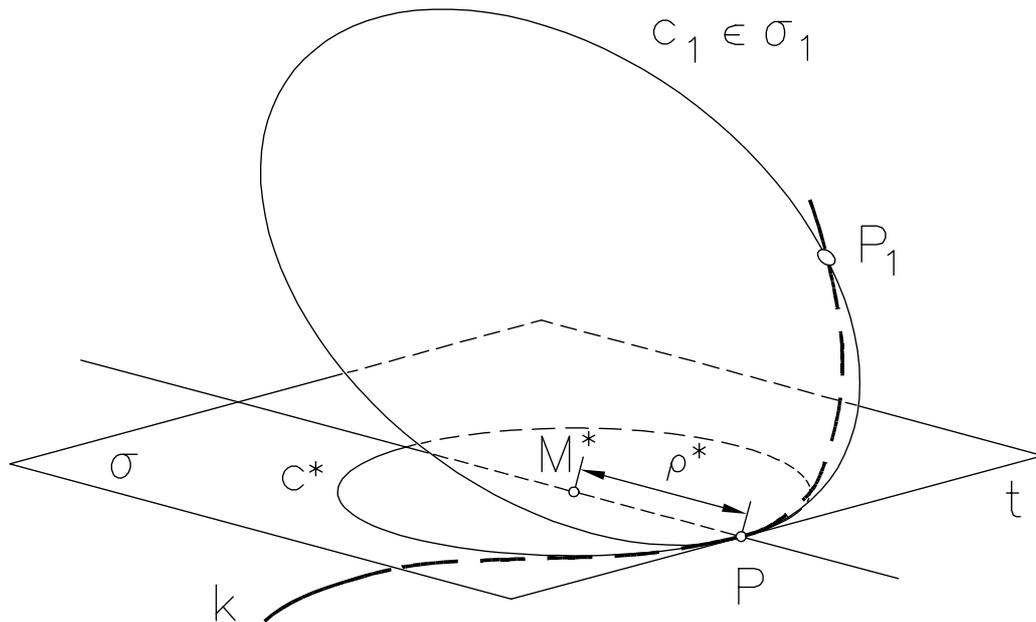


Abbildung 5.8: Krümmungskreis

P . Der Krümmungskreis c^* liegt in der Schmiegeebene σ ; sein Mittelpunkt M^* liegt auf der Hauptnormalen n . M^* wird als *Krümmungsmittelpunkt* (*Krümmungsmitte*) bezeichnet. Den Radius von c^* , also $\rho^* := M^*P$, nennt man den *Krümmungsradius*. Der Reziprokwert $\frac{1}{\rho^*} =: \kappa^*$ heißt die *Krümmung* von c in P . κ^* kann nach der Formel

$$\kappa^* = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} \tag{5.8}$$

berechnet werden. Wir berechnen als Beispiel die Krümmung der Kurve (5.2) im Punkt P , der zum Parameterwert $t = 1$ gehört. Wir erhalten

$$\kappa^*(t_0) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 36 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right|^3} = \frac{1}{12}, \tag{5.9}$$

woraus sich als Krümmungsradius 12 ergibt.

5.2 Flächen

Wir erinnern zunächst die für eine mathematische Behandlung notwendigen Darstellungsformen von Flächen die im vorigen Abschnitt eingeführt worden sind:

1. Explizite Form: $z = f(x, y)$ Beispiel: $z = \sin x \cos y$
2. Implizite Form: $F(x, y, z) = 0$ Beispiel: $(x^2 + y^2 - z - 1)^2 - 4z = 0$

3. Parameterdarstellung: $\{x = f(u, v), y = g(u, v), z = h(u, v)\}$

Beispiel (Möbiusband) :

$$\begin{aligned} x &= \cos v - u \cos v \cos \frac{v}{2} \\ y &= \sin v - u \sin v \sin \frac{v}{2} \\ z &= u \sin \frac{v}{2} \end{aligned}$$

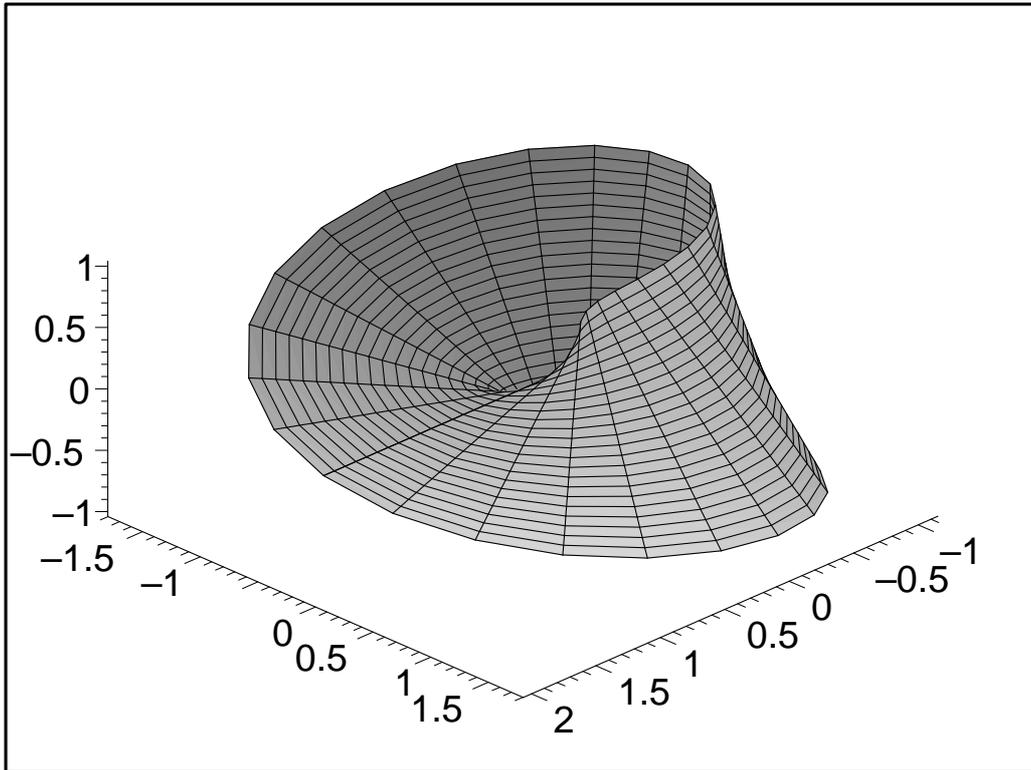


Abbildung 5.9: Moebiusband

Definition 5.2.1 Eine Kurve c , die ganz auf einer Fläche Φ liegt, heißt eine Flächenkurve.

Eine Flächenkurve läßt sich darstellen, indem man u und v in der Parameterdarstellung als Funktionen eines Parameters vorschreibt. Damit folgt aus $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u(t), v(t)) = \mathbf{x}(t)$, und dies ist eine Kurve, die ganz auf der Fläche Φ liegt. Als Beispiel nehmen wir die Flächengleichung $\mathbf{x} = \{x = -\sin u(4 + 2 \cos v), y = \cos u(4 + 2 \cos v), z = 2 \sin v\}$ und setzen $u = t$ und $v = 8t$. Wir erhalten die Parameterdarstellung:

$$\mathbf{x}(t) \dots \begin{cases} x = -\sin t(4 + 2 \cos 8t) \\ y = \cos t(4 + 2 \cos 8t) \\ z = 2 \sin 8t \end{cases} \quad (5.10)$$

Abbildung 5.10 zeigt einen Plot dieser Kurve, die ganz offensichtlich auf einem Torus liegt. Wir betrachten jetzt die Tangenten an alle Flächenkurven, die durch einen festen Punkt $P(u_0, v_0) \in \Phi$ hindurchgehen. Für den Richtungsvektor einer solchen Tangente findet man

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \quad (5.11)$$

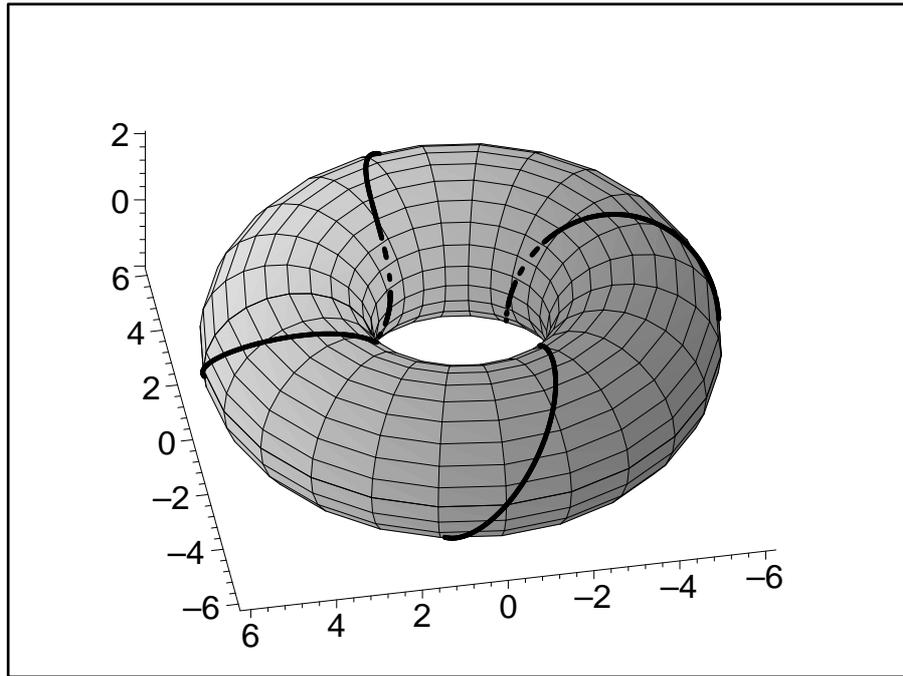


Abbildung 5.10: Kurve auf einem Torus

wobei die Vektoren $\mathbf{x}_u = \frac{d\mathbf{x}}{du}$, $\mathbf{x}_v = \frac{d\mathbf{x}}{dv}$ an der Stelle (u_0, v_0) zu nehmen sind und $\frac{du}{dt}$ und $\frac{dv}{dt}$ für $t = t_0$ zu berechnen sind. Für verschiedene Kurven durch $P(u_0, v_0)$ durchlaufen somit $(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt})$ eine Menge reeller Zahlenpaare, d.h. $\dot{\mathbf{x}}$ liegt stets in der von $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ und $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ aufgespannten Ebene τ , falls \mathbf{x}_u und \mathbf{x}_v linear unabhängig sind. Flächenpunkte $P(u_0, v_0)$, für die $\mathbf{x}_u(u_0, v_0)$ und $\mathbf{x}_v(u_0, v_0)$ linear unabhängig sind, heißen *reguläre Flächenpunkte*. Flächenpunkte $P(u_0, v_0)$ mit $\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{0}$ heißen *singuläre Flächenpunkte*. Dann gilt der

Satz 5.2.1 Die Tangenten an sämtliche Flächenkurven, die durch einen regulären Flächenpunkt P hindurchgehen, liegen in einer Ebene, der Tangentialebene τ des Flächenpunktes P .

Definition 5.2.2 Die Gerade n , die durch P läuft und zur Tangentialebene $\tau(P)$ orthogonal ist, heißt *Flächennormale* des Punktes P . Jede Gerade g , die Tangente einer Flächenkurve ist, heißt *Flächentangente*.

Für die explizite Flächendarstellung lautet die Gleichung der Tangentialebene τ im Punkt $P(x_0, y_0, z_0)$

$$Z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f_y(x_0, y_0)(Y - y_0) \quad (5.12)$$

Für die implizite Form der Flächendarstellung ist die Tangentialebene:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P)(X - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P)(Y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P)(Z - z_0) = 0 \quad (5.13)$$

angegeben. Bei beiden Darstellungen sind die Koordinaten der Punkte der Tangentialebenen X, Y, Z . Für die Parameterdarstellung erhalten wir die Vektordarstellung von τ im Punkt $P(u_0, v_0)$:

$$\tau \dots \mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) + \lambda \mathbf{x}_u + \mu \mathbf{x}_v \quad (5.14)$$

Beispiel 5.2.1 Gegeben ist die Fläche 2. Ordnung $F \equiv xy - z = 0$. Man berechne die Tangentialebene im Punkte $P(1, 1, z)$ und plote Fläche und Tangentialebene. Die Fläche ist ein

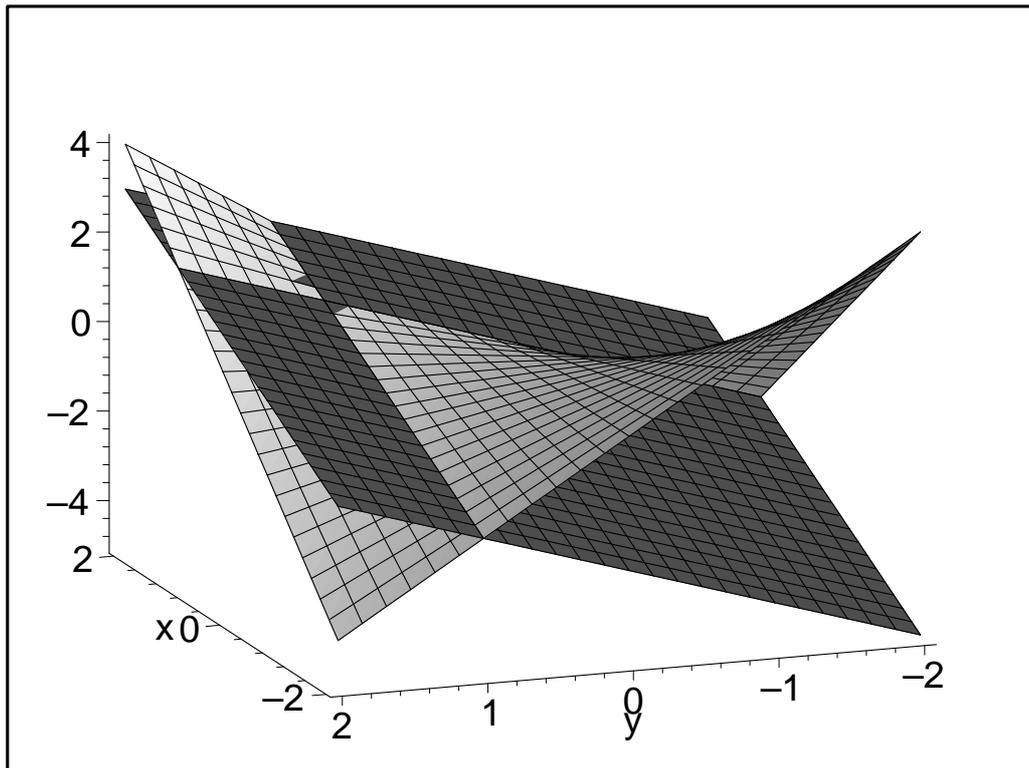


Abbildung 5.11: Hyperbolisches Paraboloid mit Tangentialebene

hyperbolische Paraboloid (das war auch die Fläche die durch lineare Interpolation von vier windschiefen Geraden entsteht; vgl. Kapitel über Bezierflächen!). Die Fläche wird in Abb. 5.11 mit ihrer Tangentialebene dargestellt. Man beachte, dass die Tangentialebene keineswegs auf einer Seite der Fläche liegen muss, sondern die Fläche sogar schneiden kann!

Aus der Flächengleichung ergibt sich sofort für den Punkt P die z -Koordinate 1. Die partiellen Ableitungen sind der Reihe nach $\frac{\partial F}{\partial x} = y$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$. damit erhalten wir nach (5.13) die Tangentialebenen

$$y(X - x) + x(Y - y) - (Z - z) = 0$$

und durch Einsetzen der Koordinaten von P ergibt sich die Tangentialebene

$$X - 1 + Y - 1 - (Z - 1) = 0 \Rightarrow X + Y - Z - 1 = 0$$

Wie man sich leicht überlegen kann lautet die Parameterdarstellung derselben Fläche:

$$\begin{aligned} x &= u \\ y &= v \\ z &= u * v \end{aligned}$$

damit erhalten wir für die Ableitungen

$$\mathbf{x}_u = \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = v \end{cases}, \quad \mathbf{x}_v = \begin{cases} x = 0 \\ y = v \\ z = u \end{cases}$$

Der Flächenpunkt $P(1,1,1)$ ergibt sich offensichtlich für $u = 1, v = 1$, wie man leicht durch

Einsetzen in die Flächengleichung bestätigt. Damit erhält man für die Tangentialebene in P :

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ein singulärer Punkt P einer Fläche mit der Darstellung $F(x, y, z) = 0$ liegt vor, wenn gilt $\frac{\partial F}{\partial x}(P) = \frac{\partial F}{\partial y}(P) = \frac{\partial F}{\partial z}(P) = 0$. Von den drei am Anfang des Abschnittes gegebenen Beispielen hat nur die durch die implizite Gleichung gegebene Fläche $(x^2 + y^2 - z - 1)^2 - 4z = 0$ einen singulären Punkt. Wir erhalten diesen Punkt durch Lösen des Gleichungssystems $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, $F = 0$. Konkret ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &: 4x(x^2 + y^2 - z^2 - 1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &: 4y(x^2 + y^2 - z^2 - 1) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} &: -2(x^2 + y^2 - z + 1) = 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Lösung des Systems (5.15) und der Flächengleichung $F = 0$ ist der Punkt $(0, 0, 1)$, in ihm existiert keine eindeutig bestimmte Tangentialebene an die Fläche. Das System von vier Gleichungen läßt auch eine geometrische Interpretation zu: Jede der Gleichungen kann für sich als die Gleichung einer Fläche aufgefasst werden. Im Allgemeinen haben vier Flächen im dreidimensionalen Raum keinen Schnittpunkt gemeinsam. Dies ist nur in Ausnahmefällen möglich, nämlich genau dann, wenn die Fläche selbst einen singulären Punkt aufweist. In Abb.5.12 sieht man den singulären Punkt als den Knoten auf der Fläche. Man sieht auch in diesem Plot eine andere Bedeutung des Begriffs singulärer Punkt. In diesem Punkt existiert keine eindeutig bestimmte Tangentialebene. In unserem Beispiel gibt es unendlich viele Tangentialebenen.

5.3 Übersichtsfragen

1. Was ist eine Raumkurve, wie sieht die Parameterdarstellung einer Raumkurve aus?
2. Wie ist eine Tangente an eine Raumkurve definiert?
3. Was versteht man unter der Schmiegenebene in einem Kurvenpunkt einer Raumkurve?
4. Was ist ein begleitendes Dreibein einer Raumkurve?
5. Wie ist der Krümmungskreis in einem Punkt einer Raumkurve definiert? Wie hängen Krümmungsradius und Krümmung zusammen?
6. Welche mathematischen Darstellungformen gibt es für Flächen? Welche Darstellungsform ist für die Computergraphik am geeignetsten?
7. Was versteht man unter einer Flächenkurve? Wie kommt man von der Parameterdarstellung einer Fläche zur Parameterdarstellung einer Kurve auf dieser Fläche?
8. Wann liegt ein singulärer Punkt auf einer Fläche vor? (Beispiel?)

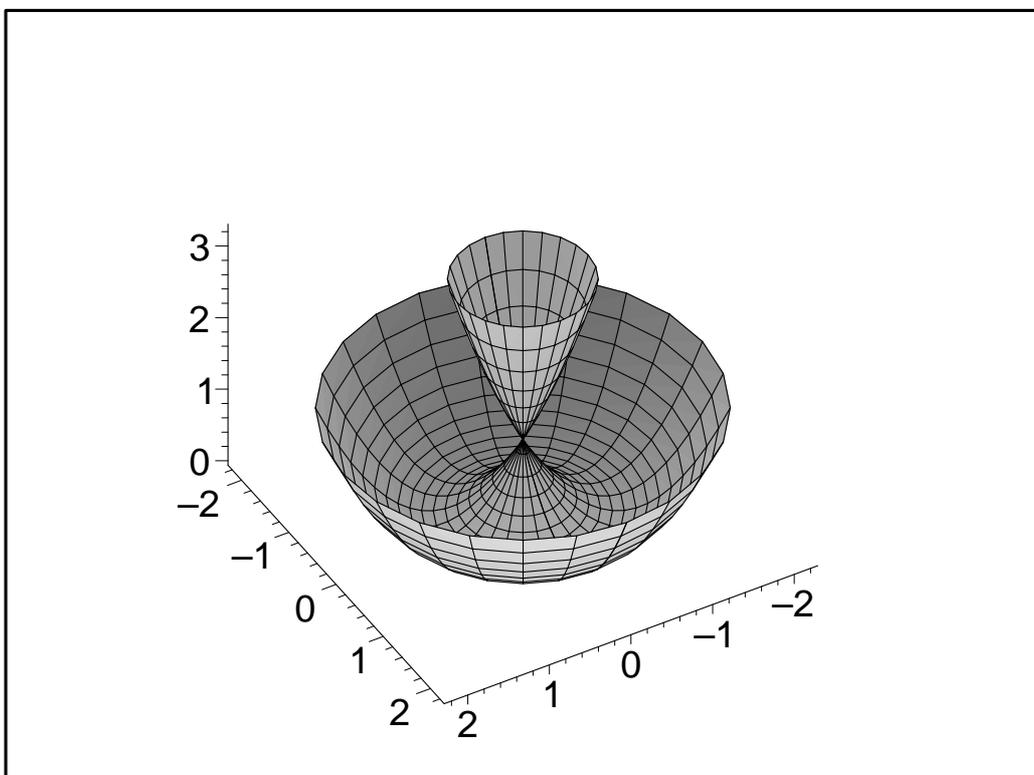


Abbildung 5.12: Singulärer Punkt auf einer Fläche

Kapitel 6

Topologische Eigenschaften von Raumobjekten

6.1 Einleitung

Die Freiformkurven und Freiformflächen des vorletzten Abschnittes haben die wesentliche Eigenschaft, dass sie im Designprozess deformiert werden können. Dabei gehen viele Eigenschaften verloren, die wir bisher behandelt haben, wie z.B. Längenmaße, Winkelmaße, Flächenmaße. Nun können wir uns fragen: gibt es vielleicht dennoch Eigenschaften dieser Objekte, die sich mathematisch präzise fassen lassen und nicht verändert werden? Mit mathematischen Eigenschaften von deformierbaren Objekten beschäftigt sich die *Topologie*. Denken wir uns ein Objekt (z.B. eine Kurve, eine Fläche ein Solid) aus beliebig deformierbarem, aber völlig unzerreißbarem und unverklebbarem Material hergestellt, dann fragen wir nach Eigenschaften, die erhalten bleiben, wenn man diese Objekte beliebig deformiert. Beispielsweise werden solche Eigenschaften gleichzeitig auf eine Kugel, ein Ellipsoid, einen Quader oder ein Tetraeder zutreffen, da sie alle ineinander deformiert werden können. Stellen wir uns dazu den Quader aus Gummi hergestellt vor und blasen den Gummiquader auf. Irgendwann werden wir eine Kugel bekommen.

Wir werden uns in diesem Abschnitt aber nicht nur mit topologischen Konzepten auseinandersetzen, sondern auch noch einige andere wichtige Konzepte zur mathematischen Beschreibung von Objekten kennenlernen. Als Einstieg zitieren wir hier die Geschichte von Flatland nach E.A. Abbott (Flatland, A Romance of Many Dimensions, Dover, New York, 1952, Original: Text by Edwin A. Abbott, 1884) entnommen aus dem Buch "The Shape of Space" von J. Weeks:

Flatland

In 1884 an extraordinary individual named A Square succeeded in publishing his memoirs. Actually an intermediary by the name of Abbott published them for him. A Square himself was in prison for heresy at the time. A Square was extraordinary not because he had such an odd name, but rather because he had such a descriptive and accurate name. For you see, A Square was a square (Figure 6.1). Now you might be wondering just where A Square lived. After all, you wouldn't expect to find a two-dimensional square living in a three-dimensional universe such as ours. You might allow for a slightly thickened square, say a creature with the dimensions of a sheet of paper, but certainly not a completely flat individual like A Square. Anyhow, A Square didn't live in our three-dimensional universe. He lived in Flatland, a two-dimensional universe resembling a giant plane.

Flatland also happens to be the title under which A Square's memoirs were published. It's now

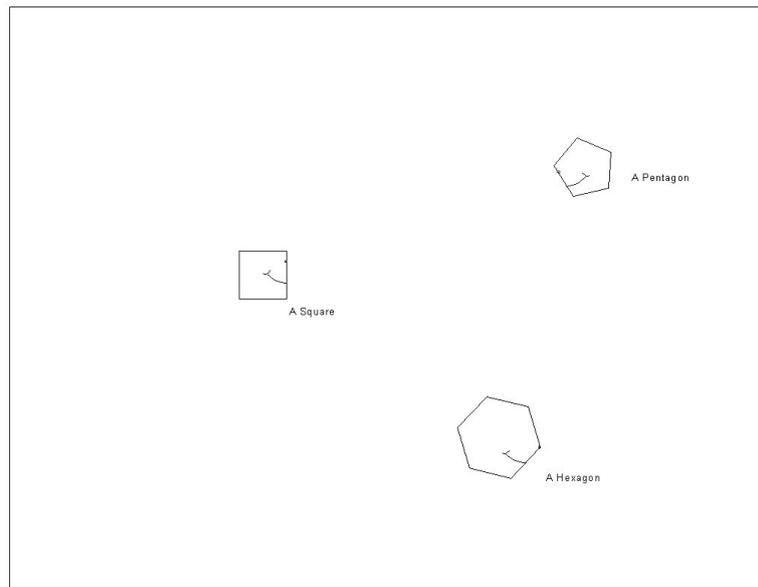


Abbildung 6.1: Flatland

available in paperback, and I recommend it highly. In 1907 C. H. Hinton published a similar book, *An Episode of Flatland*. The chief difference between these books is that the residents of Flatland proper can move freely about their two-dimensional universe, whereas the inhabitants of Hinton's world are constrained by gravity to living on the circular edge of their disk-shaped planet Astria (Figure 6.2).

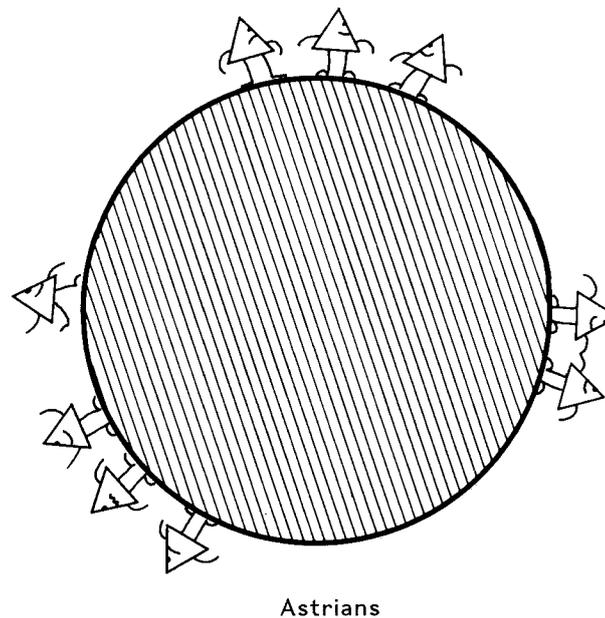


Abbildung 6.2: Astria

For the full story on the lore of Astria, see A. K. Dewdney's *The Planiverse*. Getting back to the subject at hand, the Flatlanders all thought that Flatland was a giant plane, what we Spacelanders would call a Euclidean plane. To be accurate, I should say that they assumed that Flatland was a plane, since nobody ever gave the issue any thought. Well, almost nobody. Once a physicist by the name of A Stone had proposed an alternative theory, something about Flatland having a finite area, yet having no boundary. He compared Flatland to a circle. For the most

part people didn't understand him. It was obvious that a circle had a finite circumference and no endpoints, but what did that have to do with Flatland, which obviously had an infinite area? At least part of the problem was linguistic: The only word for "plane" was the word for "Flatland" itself, so to express the idea that Flatland was not a plane, one was trapped into stating that "Flatland is not Flatland". Needless to say, this theory attracted few disciples. A Square, though, was among the few. He was particularly intrigued by the idea that a person could set out in one direction and come back from the opposite direction, without ever having turned around. He was so intrigued that he wanted to try it out. The Flatlanders were for the most part a timid lot, and few had ever travelled more than a day or two's journey beyond the outlying farms of Flatsburgh. A Square reasoned that if he were willing to spend a month tromping eastward through the woods, he might just have a shot at coming back from the west. He was delighted when two friends volunteered to go with him. The friends, A Pentagon and A Hexagon, didn't believe any of A Square's theories; they just wanted to keep him out of trouble. To this end they insisted that A Square buy up all the red thread he could find in Flatsburgh. The idea was that they would lay out a trail of red thread behind them, so that after they had travelled for a month and given up, they could then find their way back to Flatsburgh. As it turned out, the thread was unnecessary. Much to A Square's delight—and A Pentagon's and A Hexagon's relief—they returned from the west after three weeks of travel. Not that this convinced anyone of anything. Even A Pentagon and A Hexagon thought that they must have veered slightly to one side or the other, bending their route into a giant circle in the plane of Flatland (Figure 6.3).

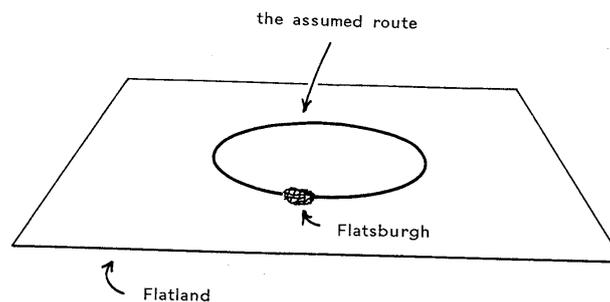


Abbildung 6.3: The first journey

A Square had no reply to their theory, but this did little to dampen his enthusiasm. He was ready to try it again! By now red thread was in short supply in Flatland, so this time A Square laid out a trail of blue thread to mark his route. He set out to the north, and, sure enough, returned two weeks later from the south. Again everyone assumed that he had simply veered in a circle, and counted him lucky for getting back at all. A Square was mystified that his journey was so much shorter this time, but something else bothered him even more: he had never come across the red thread they laid out on the first journey. The physicists of Flatland were equally intrigued. They confirmed that even if Flatland were a so-called "hypercicle" as A Stone had suggested, the two threads would still cross (Figure 6.4).

There was, of course, the possibility that the red thread had broken for one reason or another. To investigate this possibility, the scientists formed two expeditions: one party retraced the red thread, the other retraced the blue. Both threads were found to be intact. The mystery of the nonintersecting threads remained a mystery for quite a few years. Some of the bolder Flatlanders even took to retracing the threads periodically as a sort of pilgrimage. The first hint of a resolution came when a physicist proposed that Flatland should be regarded neither as a "Flatland" (i.e. a plane) nor as a hypercircle but as something he called a "torus". At first no one had any idea what he was talking about. Gradually though, people agreed that this theory

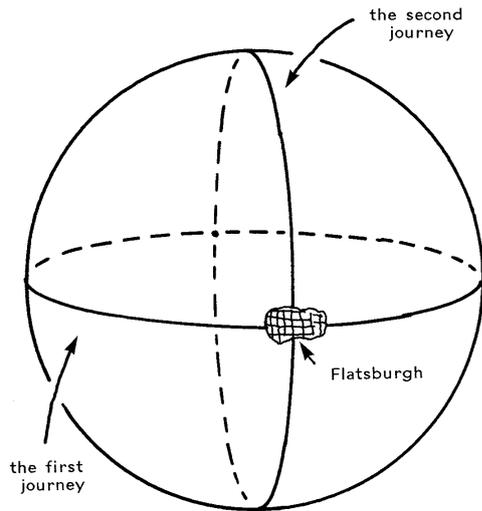


Abbildung 6.4: The second journey

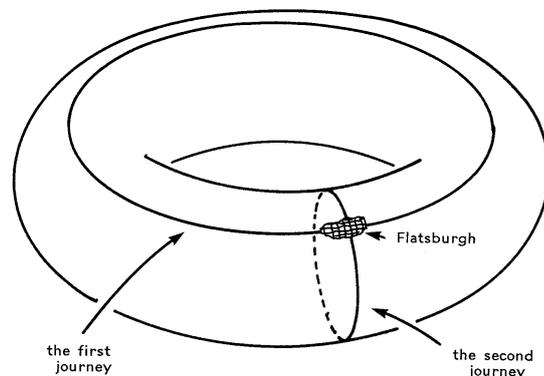


Abbildung 6.5: Flatland with torus shape

resolved the mystery of the nonintersecting threads, and everyone was happy about that. So for many years Flatland was thought to be a torus (Figure 6.5).

Until one day somebody came up with yet another theory on the "shape" of Flatland. This theory explained the mystery of the nonintersecting threads just as well as the torus theory did, but it gave a different overall view of Flatland. And this new theory was just the first of many. For the next few months people were constantly coming up with new possibilities for the shape of Flatland (Figure 6.5).....

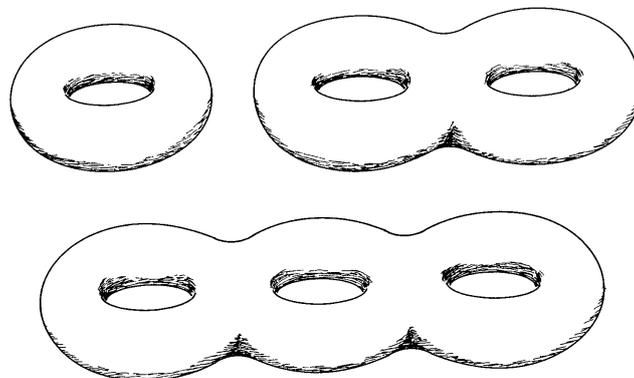


Abbildung 6.6: Other possible shapes of flatland

Die Torus-Form von Flatland mag etwas seltsam erscheinen, dass das von unseren Erfahrungen nicht so ganz weit weg ist, mag folgendes Beispiel zeigen (Abb. 6.7). Bei manchen Computerspielen agiert das Spielobjekt (hier ein Flugzeug) auf die folgende Art und Weise: wenn es z.B. am oberen Rand des Bildschirms ankommt, dann wechselt es an den unteren Rand genau auf den gegenüber liegenden Punkt und setzt die Fahrt fort. Wie lässt sich diese Sichtweise der Programmierer erklären?

Wenn die obere und die untere Kante des Bildschirms miteinander identifiziert werden, dann ist der Bildschirm einem Zylinder äquivalent (Abb. 6.7).

Identifiziert man nachher noch den rechten und den linken Rand (der inzwischen zu einem Kreis gebogen ist), dann erhält man einen Torus. Analog zur Form von Flatland haben die

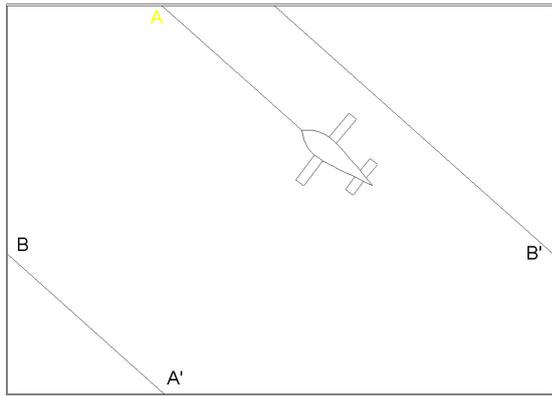


Abbildung 6.7: Flugbahn bei einem Computerspiel

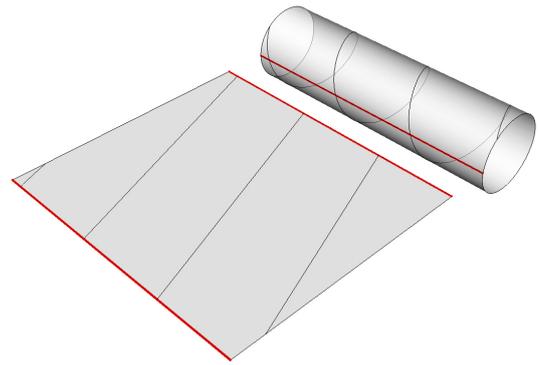


Abbildung 6.8: Identifikation von oberer und unterer Kante des Bildschirms

Programmierer diese Computerspiels den Bildschirm mit der Topologie eines Torus versehen. Nimmt man daher ein Rechteck und identifiziert gegenüberliegende Seiten wie in Abbildung

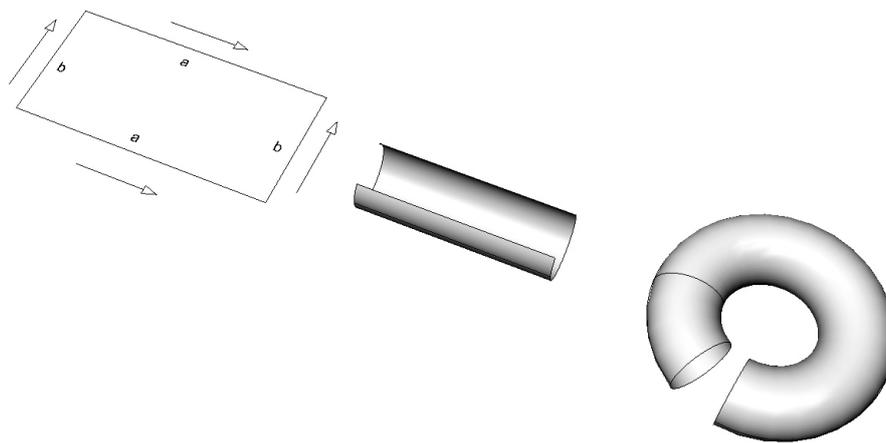


Abbildung 6.9: Flacher Torus

6.9, dann hat man ein einfaches topologisches Modell eines Torus.

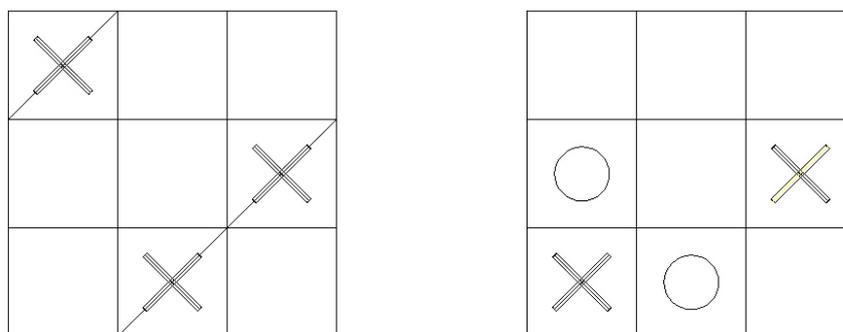


Abbildung 6.10: Tic-Tac-Toe

Ein anderes hübsches Beispiel bietet da Spiel Tic-Tac-Toe auf dem Torus. Ziel bei diesem Spiel ist es drei Kreuze in einer Reihe zu machen (diagonal ist auch erlaubt). Abb.6.10 zeigt links

eine Gewinnsituation. Wie müssen die Spieler das nächste Kreuz bzw. den nächsten Kreis beim rechten Spiel setzen um zu gewinnen?

Das oben eingeführte Verfahren zur Erzeugung eines topologischen Modells des Torus läßt sich weiter ausbauen, indem man verschiedene Zuordnungen der Seiten des Ausgangsrechteckes zuläßt. Betrachten wir dazu die folgende Zuordnung: Diese Zuordnung liefert offensichtlich

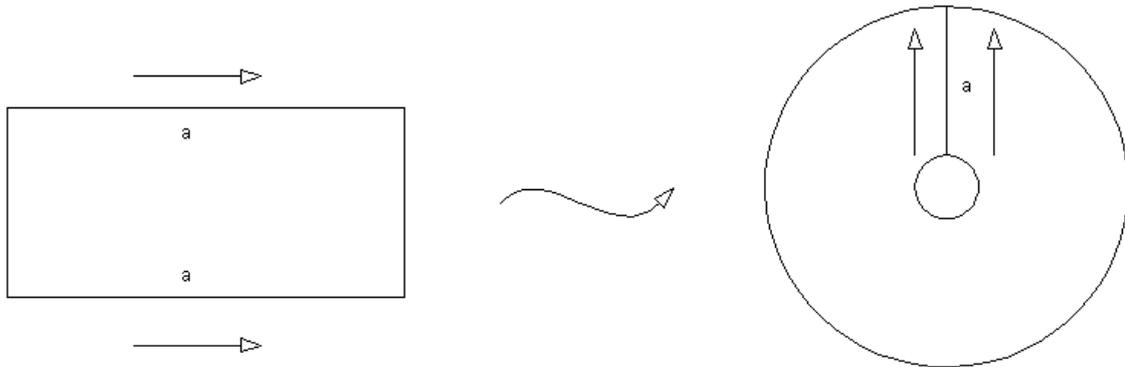


Abbildung 6.11: Möbiusband

einen Kreisring und dieser ist dem Zylinder von vorhin topologisch äquivalent. Dass dies der Fall ist sieht man so ein: man denke sich den Kreisring aus Gummi mit einer Randkurve in der Ebene befestigt und ziehe den anderen Randkreis aus der Ebene heraus. Was sind nun die wesentlichen Unterschiede zum Torus? Da wir nur ein Paar von Seiten identifiziert haben besitzt die entstehende Fläche zwei Randkurven. Sie ist nicht geschlossen sondern offen, während der Torus keine Randkurven besitzt und daher geschlossen ist. Torus und Kreisring sind ganz offensichtlich durch keine topologische Transformation ineinander überführbar. Wir halten fest:

Offene Flächen haben Randkurven. Sie könne durch keine topologische Transformation in geschlossene Flächen übergeführt werden.

Eine weitere Möglichkeit der Zuordnung zeigt Abb. 6.12:

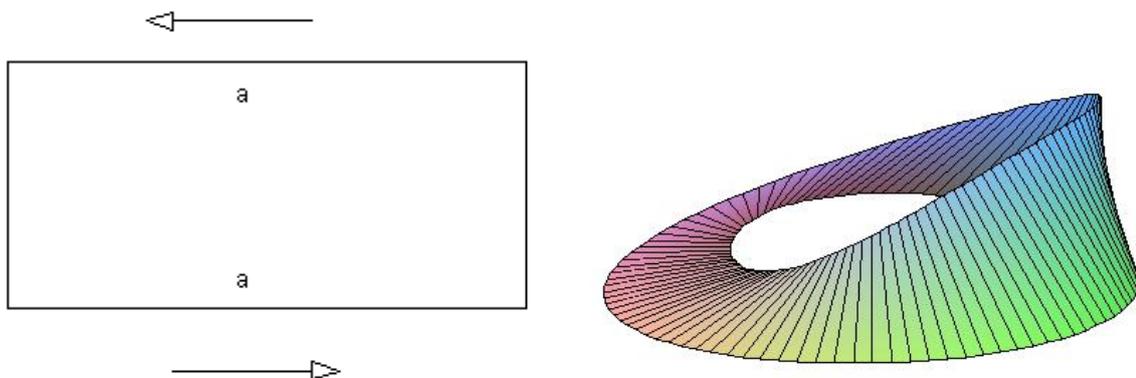


Abbildung 6.12: Möbiusband

Ganz offensichtlich erhält man das räumliche Objekt wenn man einen Streifen Papier nimmt und vor dem Zusammenkleben von zwei Rändern um 180° verdrillt. Die entstehende Fläche ist

ebenfalls nicht mehr geschlossen, sie hat aber nur einen Rand, denn wie man leicht nachprüfen kann ist die Randkurve eine geschlossene Kurve. Die Fläche heißt *Möbiusband*¹. Das Möbiusband führt uns auf weitere wichtige topologische Begriffe: Es ist leicht festzustellen, dass es *einseitig* ist. Dazu betrachte man einen geschlossenen Weg auf der Fläche, stelle sich die Fläche als eine dünne Membran materialisiert vor (was natürlich nicht ganz richtig ist!) und betrachte einen Käfer der diesen Weg entlangkrabbelt. Nach einem Umlauf wird der Käfer auf der anderen Seite der Membran sein! Einseitige Flächen lassen sich durch einen anderen topologischen Begriff charakterisieren für den man das Vehikel der Membran nicht braucht: Wir betrachten dazu eine geschlossene Kurve auf dem Möbiusband und denken uns um jeden Punkt der Kurve eine geschlossene Kurve (z.B. einen Kreis) gezogen. Der Kreis sei mit einem Durchlaufsinne versehen. Wenn man nun die Kurve in einer Richtung abläuft und dabei für alle Punkte der Kurve der Durchlaufsinne derselbe ist, dann heißt die Fläche *orientierbar*. Eine einseitige Fläche kann nun niemals orientierbar sein. Wir betrachten dazu das Möbiusband im Rechteckmodell (Abb. 6.13) und ziehen eine geschlossene Kurve, die die Bahn des Mittelpunktes eines orientierten Kreises sein soll. Der orientierte Kreis erfährt beim Durchlaufen der geschlossenen Kurve eine Änderung des Durchlaufsinnes.

Beim Durchlaufen einer geschlossenen Kurve einer nichtorientierbaren Fläche ergibt sich ein weiteres interessantes Phänomen: Wenn man auf einer Seite der Kurve startet, dann kommt man nach einem Durchlauf auf der anderen Seite wieder an. Würde man die Kurve als einen Flusslauf betrachten und z.B. am rechten Flussufer starten, dann würde man am linken Flussufer zurückkehren ohne den Fluss über quert zu haben. Man bezeichnet geschlossene Kurven auf einer nichtorientierbaren Fläche als *einufrige Kurven*.

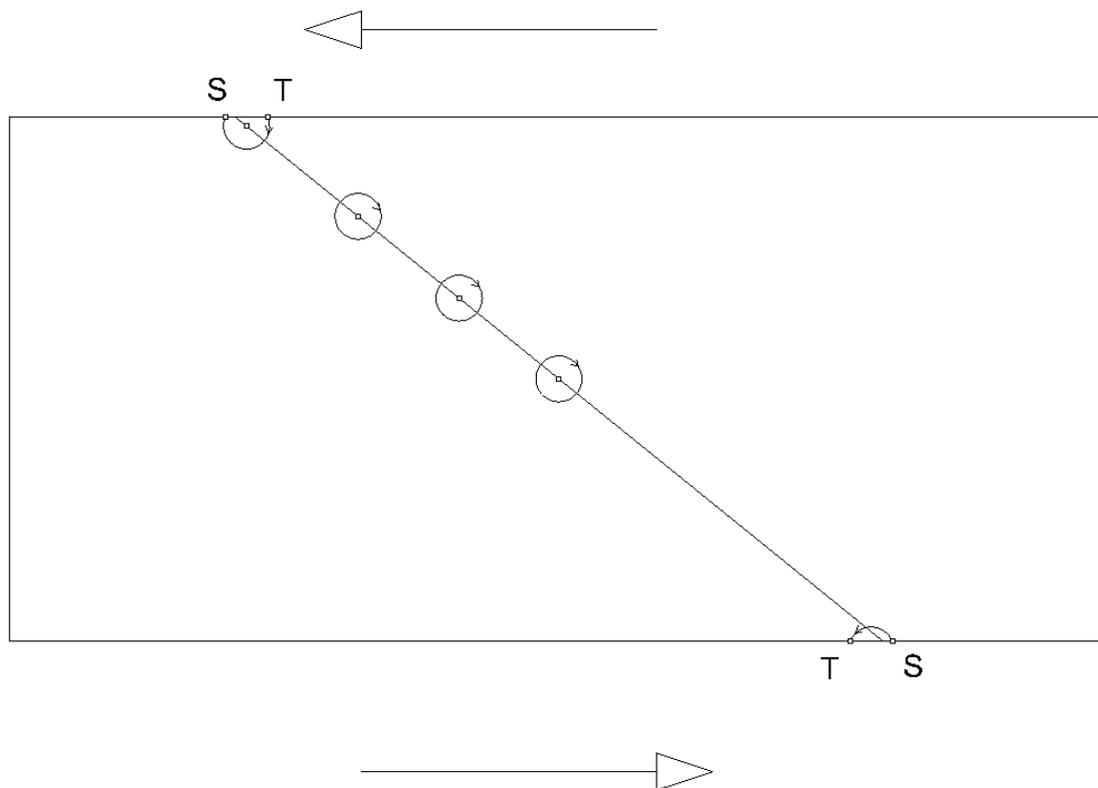


Abbildung 6.13: Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes

¹Eine Parameterdarstellung dieser Fläche findet sich im Kapitel differentialgeometrische Eigenschaften von Kurven und Flächen.

Bemerkung 6.1.1 Diese Eigenschaft hätte eine überaus interessante Konsequenz für Flatland wenn es ein Möbiusband wäre. A Square wäre nämlich in diesem Fall nach seiner Reise als sein eigenes Spiegelbild nach Flatsburg zurückgekommen!

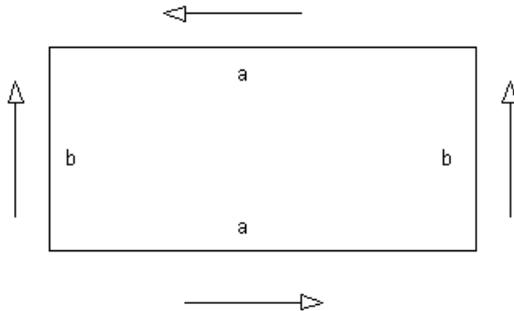


Abbildung 6.14: Klein'sche Fläche

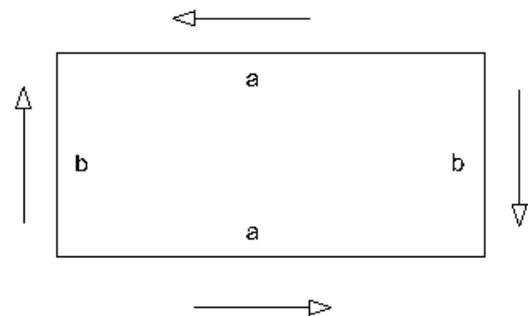


Abbildung 6.15: Projektive Ebene

Zwei weitere Möglichkeiten aus einem ebenen Rechteck ein Modell einer topologischen Fläche zu erzeugen zeigen die Abbildungen 6.14 und 6.15. Da in beiden Fällen alle Seiten des Ausgangsrechteckes in irgendeiner Weise miteinander identifiziert sind sind beide Flächen geschlossen und da es für beide orientierungsumkehrende Pfade gibt sind beide Flächen nicht orientierbar. Abbildung 6.14 ist ein topologisches Modell der berühmten *Klein'schen Fläche*. Ähnlich wie wir aus dem flachen Torus ein 3-D Modell erzeugen konnte, so können wir auch bei der Klein'schen Fläche ein 3D-Modell erzeugen. Der Vorgang ist in der Abb. 6.16 gezeigt². Wir kleben zuerst die beiden gleich orientierten Seiten aufeinander zu einem Zylinder den wir allerdings noch auf einer Seite etwas aufblasen. Nun ist zu beachten, dass auf den nun zu verklebenden Seiten (Kreisen nach den erste Klebvorgang!) eine Umkehrung der Orientierung erfolgen muss (z.B. $A \rightarrow A'$). Um dies zu erreichen müssen wir einen Trick benutzen. Wir müssen den Schlauch durchdringen und von "innen" verkleben. Die entstehende Fläche ist geschlossen aber nicht orientierbar. Sie ist auch einseitig. Das 3D-Modell besitzt allerdings eine Selbstdurchdringung. Man kann allerdings allgemein zeigen, dass nichtorientierbare geschlossene Flächen im 3-dimensionalen Raum nicht ohne Selbstdurchdringungen darstellbar sind.

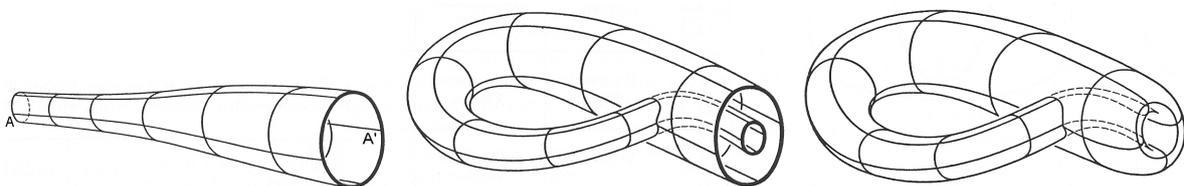


Abbildung 6.16: Erzeugung eines 3D-Modells der Klein'schen Fläche

Abbildung 6.15 ist ein topologisches Modell der projektiven Ebene. Man könnte in diesem Fall als Modell auch eine Kreisscheibe verwenden bei der diametrale Punkte identifiziert werden. Auch für diese topologische Fläche können wir ein 3D-Modell erzeugen. Wir bezeichnen dazu die Ecken des Rechteckes mit A, B, C, D und verformen das Rechteck so dass es Kugelform bekommt mit einem viereckigen Loch. In einem weiteren Schritt verkleben wir die vier Seiten

²Die Bilder entstammen dem Buch: Hilbert, Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer Verlag, 2. Aufl. 1996

des verbleibenden Rechtecks, so dass die Seiten alle auf eine Gerade zu liegen kommen mit der richtigen Orientierung. Dazu muss man die Punkte B und D nach unten ziehen und A und C nach oben. Die entstehende Fläche Φ kann durch eine Fläche mit der Darstellung

$$(ax^2 + by^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2z(x^2 + y^2) = 0, \quad a, b \text{ Formparameter}$$

modelliert werden. Abbildung 6.18 zeigt links einen Plot der impliziten Flächengleichung und rechts einen sogenannten Konturplot in dem horizontale Schnittkurven der Fläche dargestellt werden. Man sieht deutlich, dass das Modell ebenfalls eine Selbstdurchdringung aufweist.

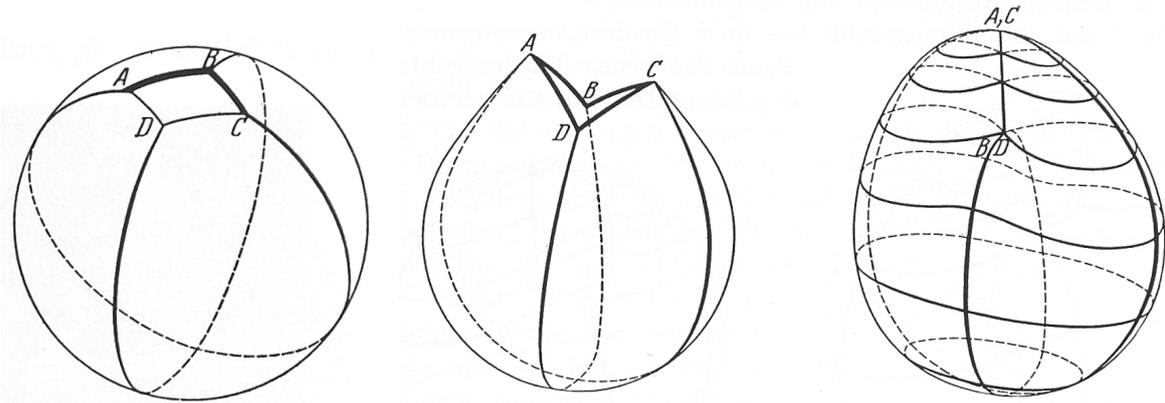


Abbildung 6.17: Erzeugung eines 3D-Modells der projektiven Ebene

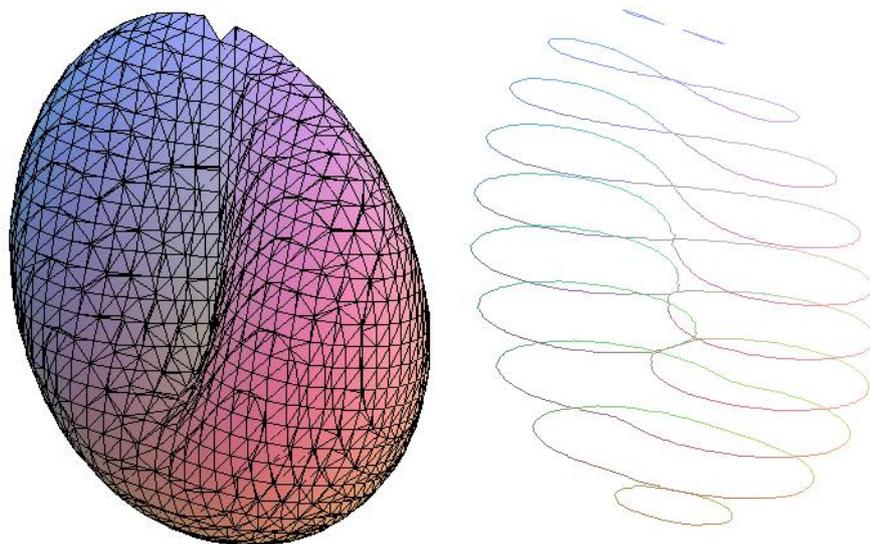


Abbildung 6.18: Analytisches 3D-Modell der Kreuzhaube

Schneidet man die Fläche Φ mit einer Ebene normal zur Durchdringungsgeraden ab, so erhält man eine berandete Fläche die *Kreuzhaube* (engl. *crosscap*) heißt und ein Modell für das Möbiusband darstellt (warum?).

Man muss sich bei den ebenen Modellen von topologischen Flächen nicht auf ein Rechteck beschränken. Durch $4p$ - Polygone lassen sich Tori mit p Löchern herstellen. Solche Tori werden manchmal auch *Brezel* genannt. Als Beispiel betrachten wir dazu das Polygon für $p = 2$ nämlich das 8-Eck in Abb.6.19. Mit den angegebenen Identifizierungen lässt sich der 2-Torus erzeugen.

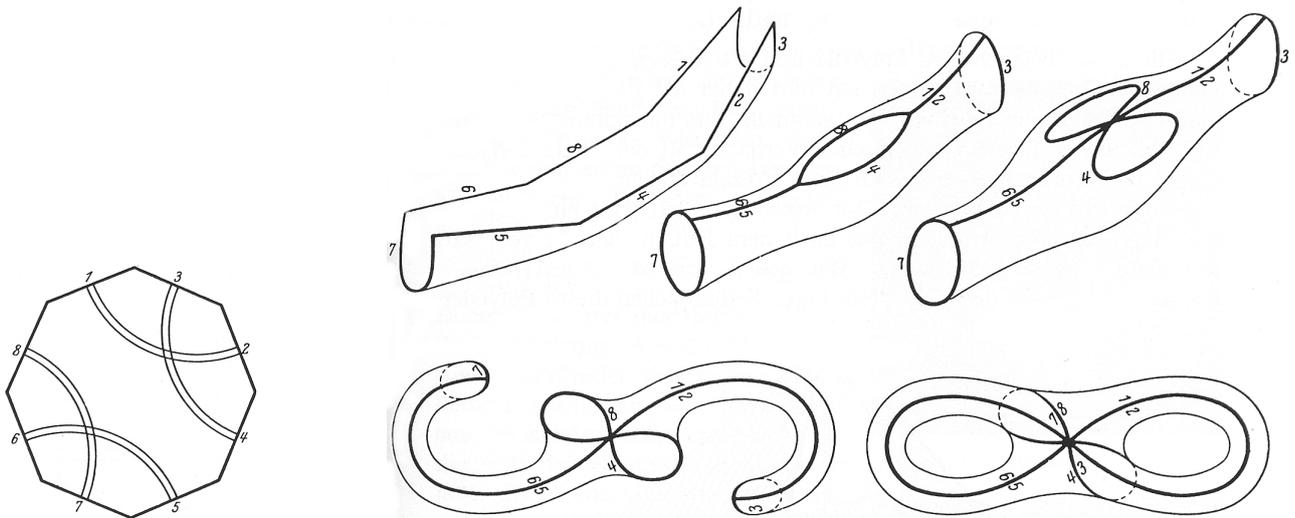


Abbildung 6.19: 2-Torus (Bilder aus Hilbert, Cohn-Vossen)

Ein weiterer wichtiger topologische Begriff ist der des Zusammenhangs:

Eine Fläche heißt h -fach zusammenhängend, wenn sich auf ihr $h-1$ Kurven bestimmen lassen, die die Fläche nicht in zwei Teile zerstückeln. Dabei muss die erste Kurve geschlossen sein, während jede weitere Kurve zwei Punkte der vorhergehenden verbindet.

Betrachten wir dazu eine Kugel in Abbildung 6.20: Eine einzige Kurve zerschneidet die Kugel in zwei Flächen, daher ist der Zusammenhang $h = 1$. Beim Torus können wir zwei Schnitte anbringen ohne die Fläche zu zerstückeln, denn wir brauchen dazu nur vom 3D-Modell auszugehen und den flachen Torus erzeugen. Durch die beiden Schnitte, einmal längs eines Breitenkreises und einmal längs eines Meridians kommen wir zum flachen Torus. Jeder weitere Schnitt zerlegt den flachen Torus in zwei Flächen.

Perspektive

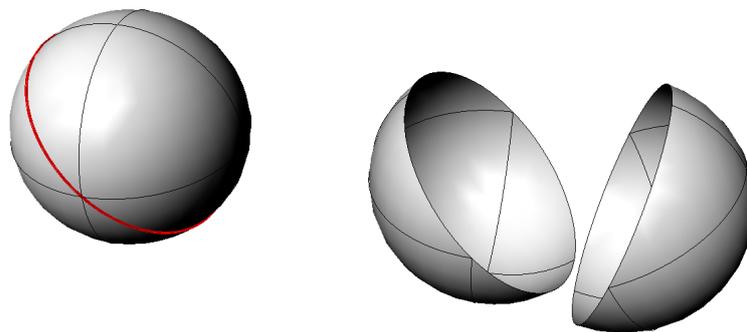


Abbildung 6.20: Zusammenhang Kugel

Mit derselben Überlegung ergibt sich der Zusammenhang des Möbiusbandes $h = 2$; der Zusammenhang der Kleinschen Fläche ist $h = 3$ und für die projektive Ebene erhält man $h = 2$.

Den Zusammenhang $h = 2$ für die projektive Ebene kann man folgendermaßen einsehen: Wir zeigen, dass die projektive Ebene mit zwei Schnitten zerfällt. Wir gehen aus vom flachen Modell der projektiven Ebene und zeichnen eine geschlossene Kurve $c = AB$ ein (Abb.6.21,links). Ganz offensichtlich zerfällt die Fläche nicht in zwei Teile, die die beiden Gebiete 1 und 2 hängen ja über die identifizierten Ränder zusammen. Eine zweite Schnittkurve zerteilt aber in zwei Gebiete. 1 und 3 bzw. 2 und 4 sind ja durch die Identifikation der Ränder als zwei Gebiete aufzufassen. Die Fläche zerfällt daher in zwei Teile.

Welche Fläche erhält man nach dem ersten Schnitt? (Möbiusband).

Es ist leicht einzusehen, dass man für ein Brezel mit p Löchern die Zusammenhangszahl $h = 2p + 1$ erhält.

Top

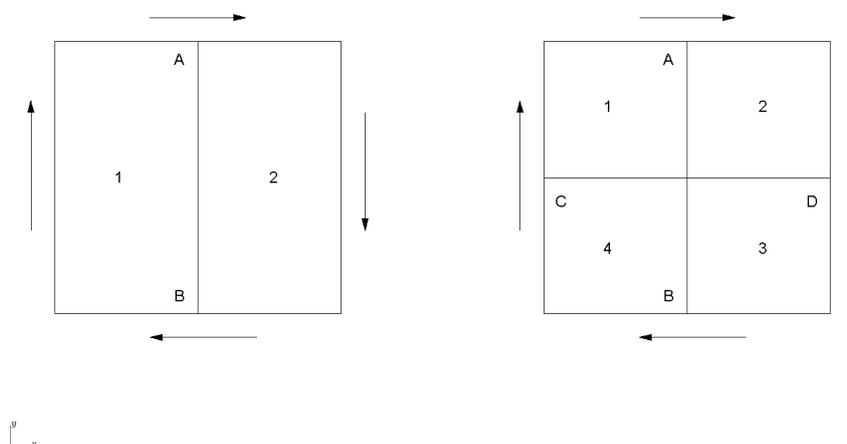


Abbildung 6.21: Zusammenhang der projektiven Ebene

Mit den Begriffen geschlossen bzw. offen (Flächen mit Randkurven), orientierbar und nicht orientierbar, sowie der Zusammenhangszahl können die Flächen in Klassen eingeteilt werden, in Klassen von Flächen die durch eine topologische Transformation ineinander übergeführt werden können.

Damit zwei Flächen topologisch äquivalent sind müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1. Beide Flächen müssen entweder geschlossen sein oder die gleiche Anzahl von Randkurven aufweisen.
2. Beide Flächen müssen entweder orientierbar oder nicht orientierbar sein.
3. Beide Flächen müssen dieselbe Zusammenhangszahl besitzen.

6.2 Zusammenziehbare Zellen, Zerlegung in Zellen und die Eulersche Charakteristik

Wir wenden uns nun weiteren topologischen Eigenschaften zu und benutzen hierfür die ersten drei Kapitel des Buches Topologikon von Jean-Pierre Petit (Physik Verlag, vergriffen, Nachdruck im Vieweg Verlag).

Wenn wir Herrn Amundsen aus seinem schlimmen Zustand befreien wollen, müssen wir vor allem versuchen zu verstehen, welche **Form** dieser merkwürdige Planet hat. Wir müssen einige Grundprinzipien der **Topologie** anwenden, indem wir jedes Objekt zerlegen in:

ZUSAMMEN- ZIEHBARE ZELLEN



Das einzig unzerlegbare Objekt scheint der Punkt zu sein...

Aber was soll man mit einem Punkt ausstellen?

Ein Objekt kann als eine Menge von Punkten betrachtet werden. Es nimmt im Raum einen gewissen Platz ein. Wir meinen das Objekt zusammenziehbar, wenn es bis auf einen Punkt zusammenschumpfen kann. Dabei dürfen aber alle seine Punkte nur den Raum durchlaufen, den das Objekt einnimmt.



Sieh mal hier dieses Kurvenstück: Das ist ein Objekt mit **einer räumlichen Dimension**.

Aha. Die Position eines Punktes auf der Kurve kann mit Hilfe einer einzigen Zahl festgelegt werden: eine krummlinige Abszisse, oder die Länge eines Fadens, der von dem betrachteten Punkt bis zu einem Nullpunkt auf der Kurve reicht.

Abbildung 6.22:



10

Abbildung 6.23:



(*) Siehe „Das Geometrikon“ aus dieser Reihe.

Abbildung 6.24:



ZERLEGUNG IN ZELLEN

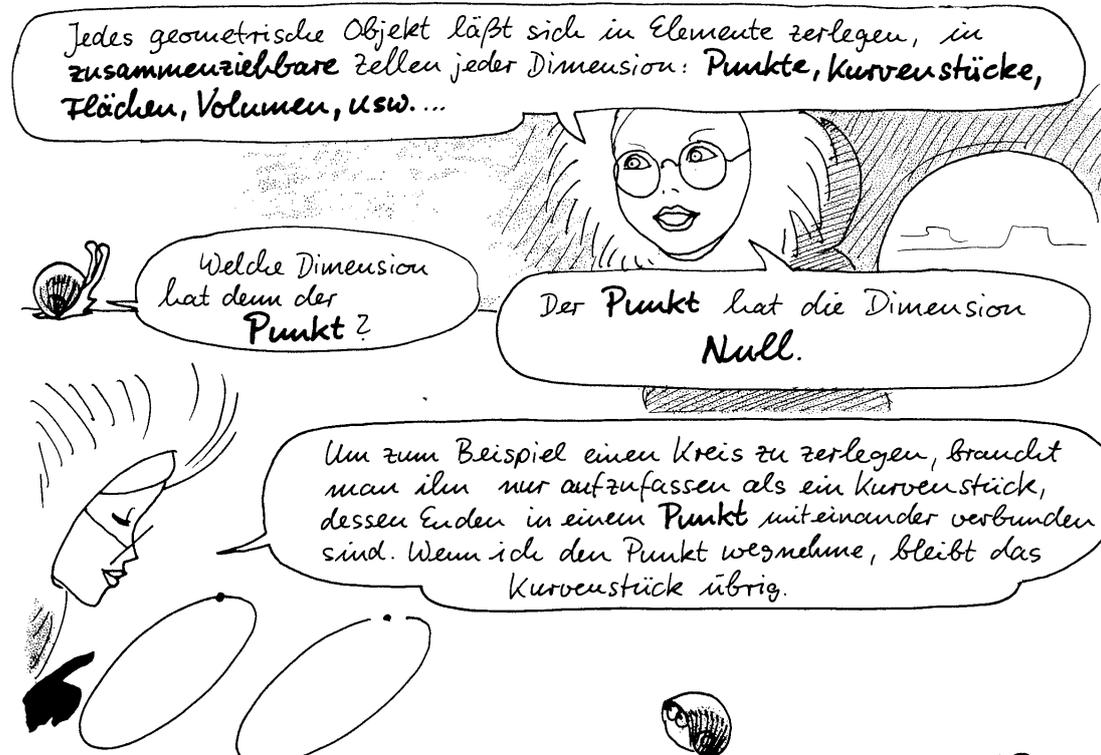


Abbildung 6.25:

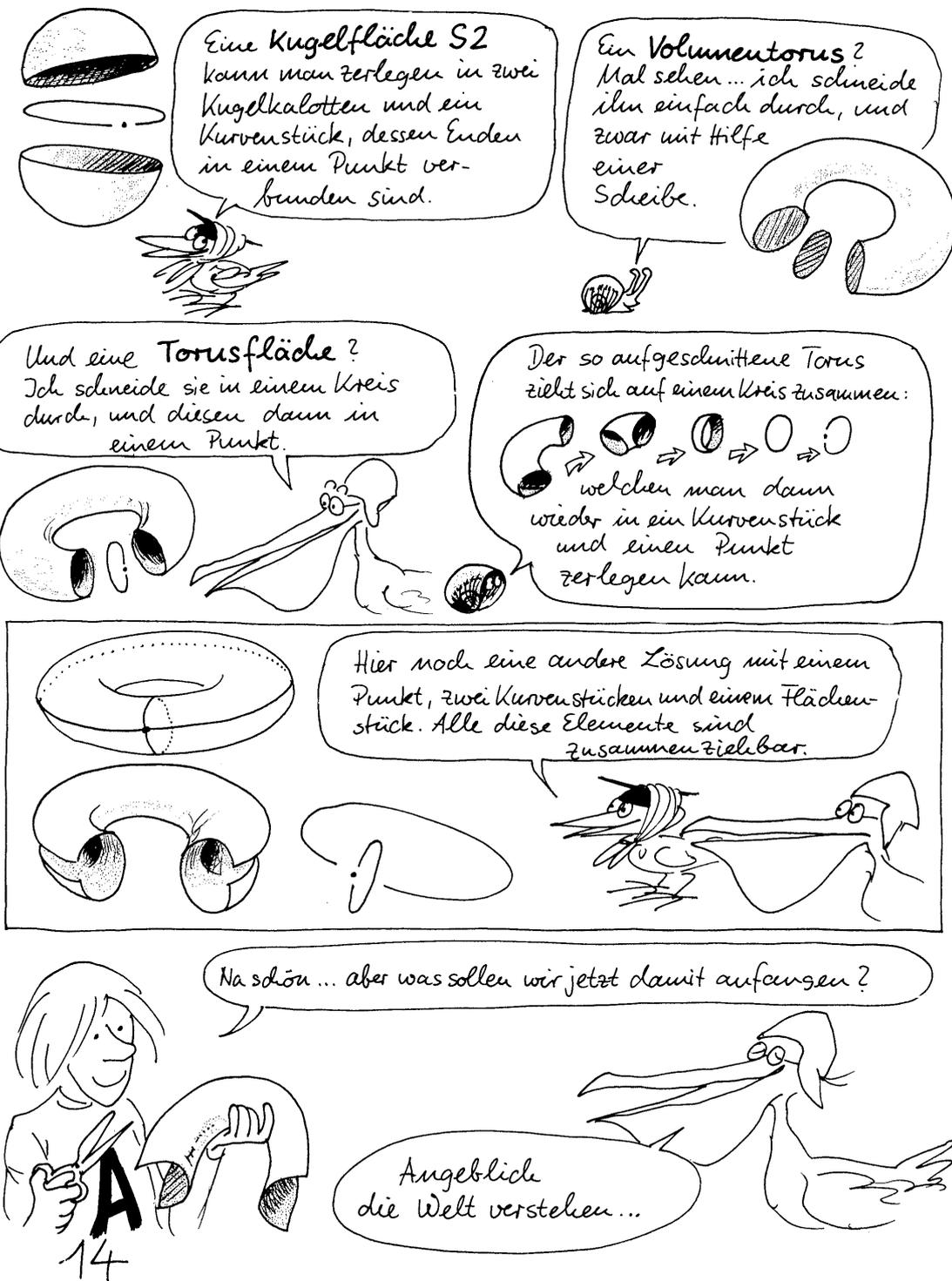


Abbildung 6.26:

DIE EULERSCHE CHARAKTERISTIK

Nachdem wir ein Objekt auf diese Art zerlegt haben, bilden wir eine Zahl χ : sie ist gleich der Zahl der Punkte minus der Zahl der Kurvenstücke plus der Zahl der zusammenziehbaren Flächenstücke minus der Zahl der zusammenziehbaren Volumen (*). Man nennt diese Zahl die Eulersche Charakteristik.



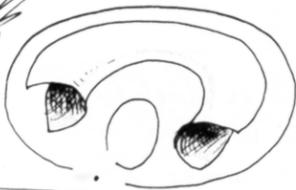
Für den Kreis ergibt sich $\chi = 1 - 1 = 0$



Und für die Kugelfläche $\chi = 1 - 1 + 2 = 2$



Ein Punkt, ein Kurvenstück, zwei Kalotten.



Die Charakteristik der Vollkugel ist natürlich -1 , die des Volltorus dagegen ist $1 - 1 = 0$ (Siehe die Abbildung auf S. 14 rechts oben).

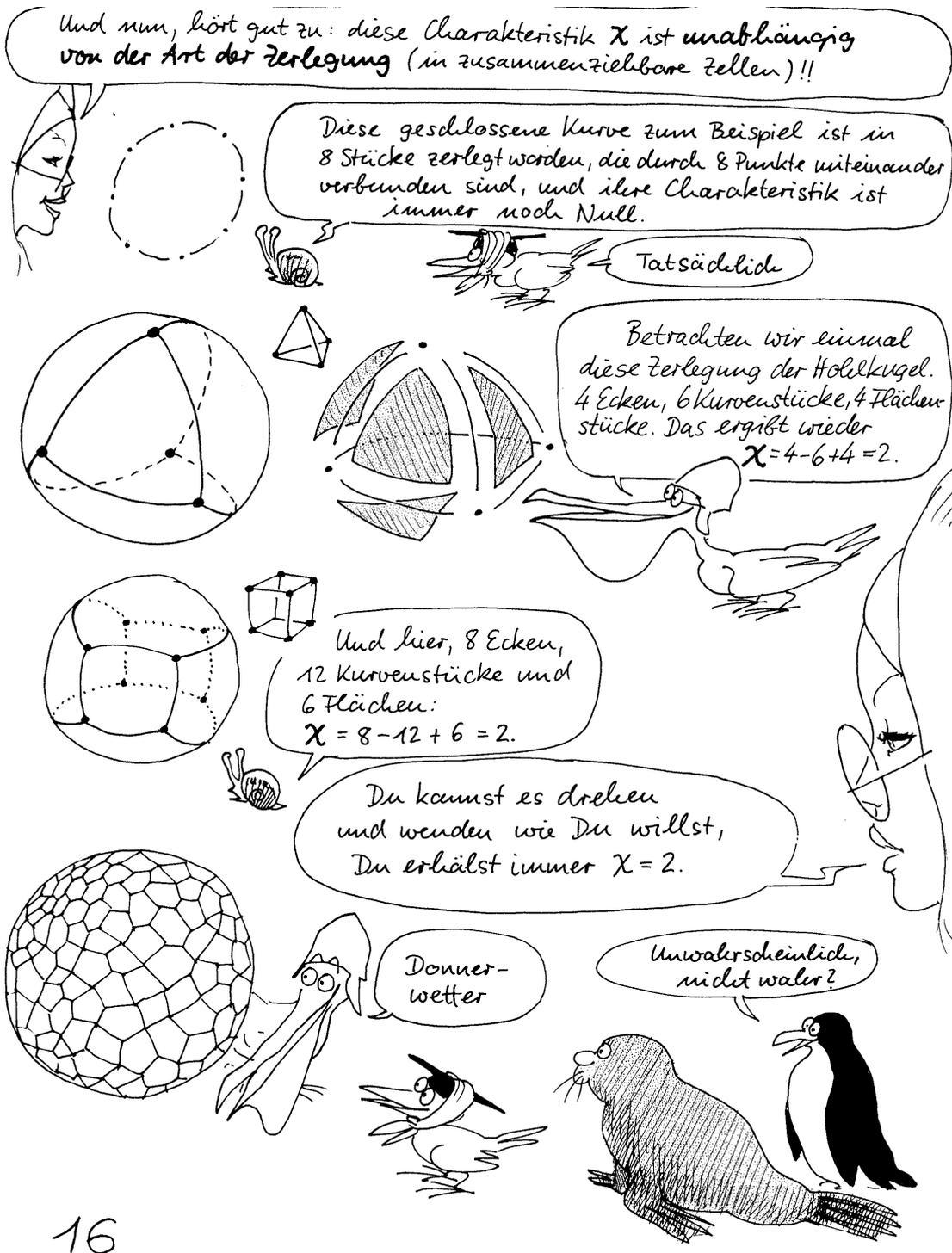
Wie sieht es bei der Torusfläche aus? ... ein Punkt, zwei Kurvenstücke, ein Flächenstück $\chi = 1 - 2 + 1 = 0$



Also alles zusammenziehbare Elemente.

(* Diese Definition lässt sich leicht auf mehr als drei Dimensionen verallgemeinern (Summe mit alternierenden Vorzeichen).

Abbildung 6.27:



16

Abbildung 6.28:

Es gibt nun eine einfache Beziehung zwischen der Zusammenhangszahl und der Eulerschen Charakteristik:

$$E - K + F = \chi = 3 - h \quad (6.1)$$

Zum Abschluss dieses kurzen Einstiegs sollen ein paar Konzepte gegenübergestellt werden, die sich mit unterschiedlichen Eigenschaften von räumlichen Objekten befassen. Es sei angemerkt, dass man sich keineswegs auf dreidimensionale Objekte beschränken muss. Wir werden dies aber tun um die Sache zu vereinfachen. Wir werden diese Konzepte in Gegensatzpaaren behandeln, um sie so noch deutlicher zu machen.

6.3 Topologie – Geometrie

Wie oben bereits angedeutet beschäftigt sich die Topologie mit allen Eigenschaften, die bei Deformationen erhalten bleiben. Zwei Objekte werden daher topologisch äquivalent genannt wenn sie durch eine Deformation, aber ohne Reißen oder Kleben ineinander übergeführt werden können. Die (euklidische) Geometrie beschäftigt sich mit allen Eigenschaften eines Objektes, die bei (euklidischen) Transformationen (als z.B. Schiebungen, Drehungen, Schraubungen) erhalten bleiben. Diese Eigenschaften haben uns fast die ganze Vorlesung beschäftigt: Länge, Flächeninhalt, Volumen, Winkel, Krümmung, Gerade, Ebene, usw. Betrachten wir die vier Objekte in Abb.6.29: Die Kugel und der Torus mit zwei Löchern sind topologisch nicht äquivalent, denn durch keine Deformation kann man in die Kugel ein Loch hineinbringen. Die beiden Flächen unten sind jeweils aus Kugel oder Torus durch Deformation entstanden. Die linke Fläche ist daher topologisch äquivalent der Kugel, während die rechte dem Torus mit zwei Löchern topologisch äquivalent ist. Die Anzahl der Löcher einer Fläche ist offensichtlich eine topologische Eigenschaft. In den Abbildungen 6.30 sind acht Flächen; alle acht Flächen sind geschlossen und orientierbar. Welche sind topologisch äquivalent?

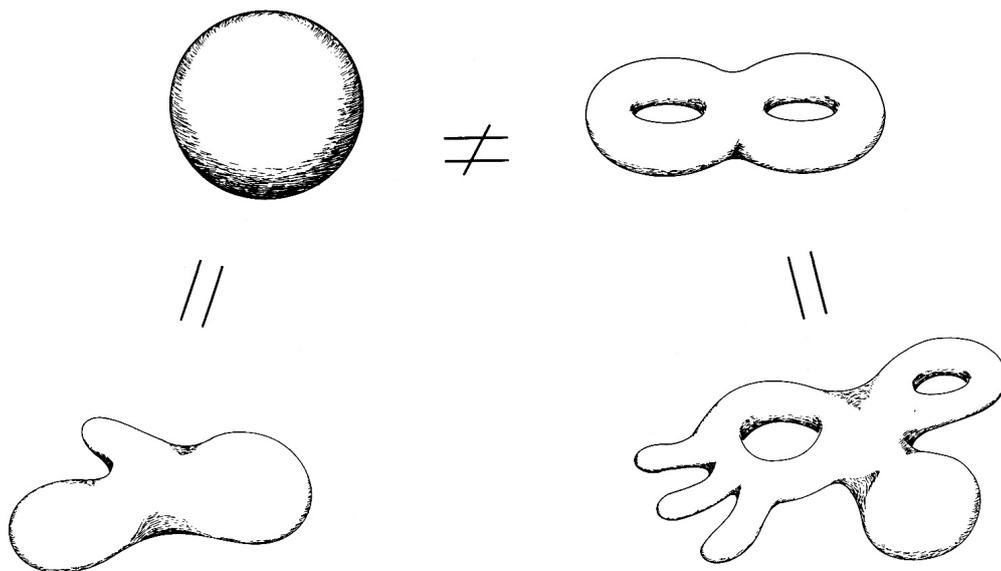


Abbildung 6.29: Topologisch unterschiedliche Flächen

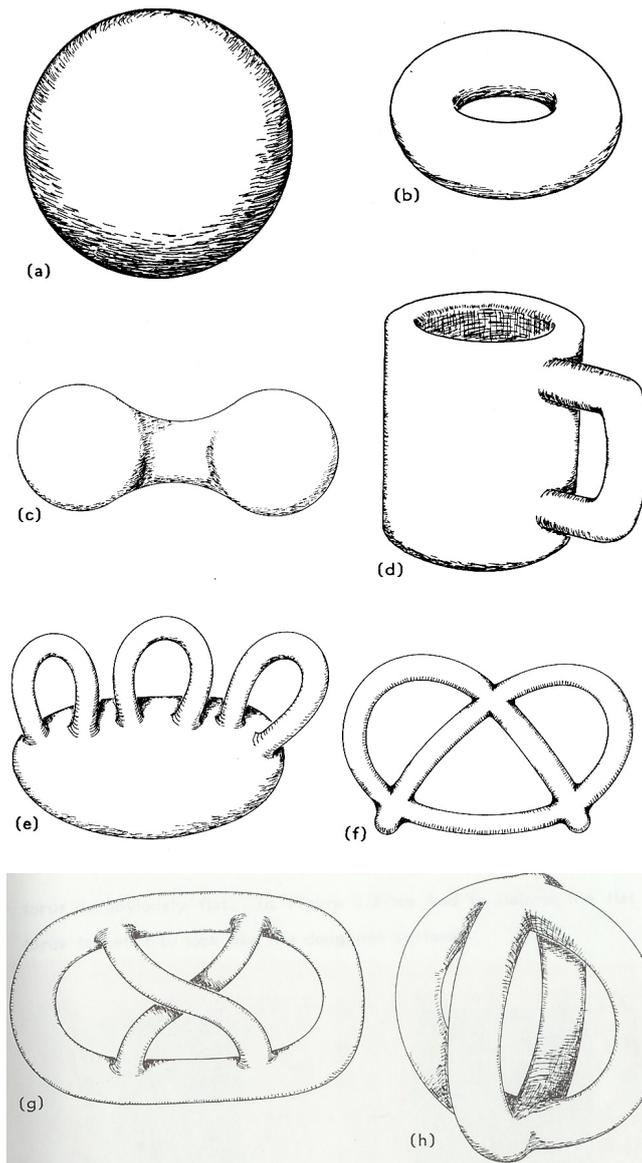


Abbildung 6.30: Topologisch unterschiedliche Flächen

6.4 Innere und äußere Eigenschaften

Wir betrachten dazu einen geschlossenen Streifen Papier, scheiden ihn durch, drehen ein Ende um 360 Grad und kleben ihn wieder zusammen. Ausgangsfläche und neue Fläche sind topologisch sicher nicht äquivalent (schneiden!). Die äußere Topologie hat sich also geändert. Wenn wir jedoch an ein zweidimensionales Lebewesen denken, das auf dem Streifen lebt, so hätte dieses Lebewesen die Prozedur so erlebt, dass seine Welt mysteriöserweise aufgeschnitten wurde und dann wieder restauriert wurde. Das zweidimensionale Lebewesen hätte keine Chance die Verdrehung seiner Welt zu erkennen oder zu erfahren. Die innere Topologie (also die Topologie die ein Lebewesen, das in dieser Welt des Streifens lebt erfahren kann) hat sich nicht geändert. Allgemein werden wir sagen, dass zwei Objekte dieselbe innere Topologie haben wenn ein Lebewesen, das auf ihnen lebt sie topologisch nicht unterscheiden kann. Sie werden dieselbe äußere Topologie haben, wenn sie durch eine Deformation im Umgebungsraum ineinander übergeführt werden können. In Abbildung 6.31 sind sechs Flächen abgebildet. Welche haben dieselbe äußere Topologie, d.h. können durch Deformationen im dreidimensionalen Umgebungsraum ineinander

übergeführt werden?

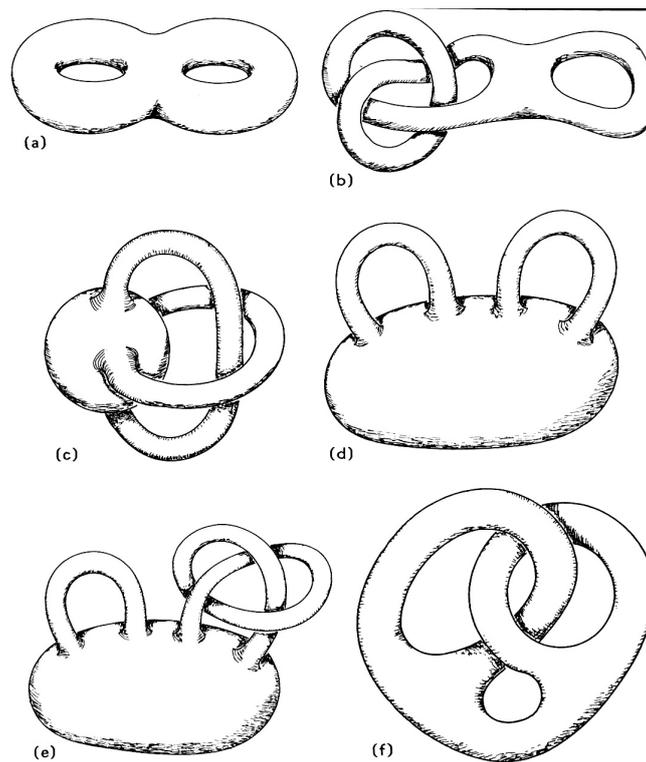


Abbildung 6.31: Äußere Topologie

Innere und äußere Eigenschaften gibt es auch bei der Geometrie. Betrachten wir dazu ein Blatt Papier. Wir biegen es zu einem Zylinder zusammen. Vom Standpunkt der dreidimensionalen Geometrie aus handelt es sich um zwei verschiedene Objekte: einmal um einen Teil einer Ebene und das zweite Mal um eine Zylinderfläche. Wenn wir jedoch vom Standpunkt eines auf dem Blatt lebenden Wesens ausgehen, so hat sich durch den Prozess des Aufrollens seine Vorstellung von der Geometrie nicht geändert. Jede Länge einer Strecke auf dem Blatt Papier ist gleich geblieben, jedes Winkelmaß, jedes Flächenmaß. Daraus folgt: der Zylinder und die Ebene haben dieselbe innere Geometrie. Abbildung 6.16 zeigt drei Flächen mit einer unterschiedlichen inneren Geometrie. Die Kugel hat eine sogenannte elliptische Geometrie, die Ebene ist euklidisch und die Sattelfläche ist hyperbolisch. Ein Lebewesen auf diesen Flächen könnte durch Ausmessen eines Dreiecks auf der Fläche feststellen auf welchem Flächentyp es sich befindet. Auf der Kugel ist die Winkelsumme in einem beliebigen Dreieck nämlich größer als 180° in der euklidischen Ebene ist die Winkelsumme gleich 180° und auf der Sattelfläche ist sie kleiner als 180° . Zwei Flächen haben dieselbe äußere Geometrie wenn sie sich durch eine Kongruenztransformation ineinander überführen lassen.

6.5 Lokal und global

Wenn ein Lebewesen die Winkelsumme in einem Dreieck bestimmte, dann könnte es nur eine lokale Aussage machen, d.h. nur lokal die Geometrie seines Universums bestimmen. Stellen wir uns vor wir wollten das für ein Lebewesen auf dem Torus tun. Wenn wir es im Außenbereich machen würden wir eine elliptische Geometrie bekommen und im Innenbereich eine hyperbolische. Man darf also aus der Messung an einer Stelle nicht auf das ganze Universum schließen.

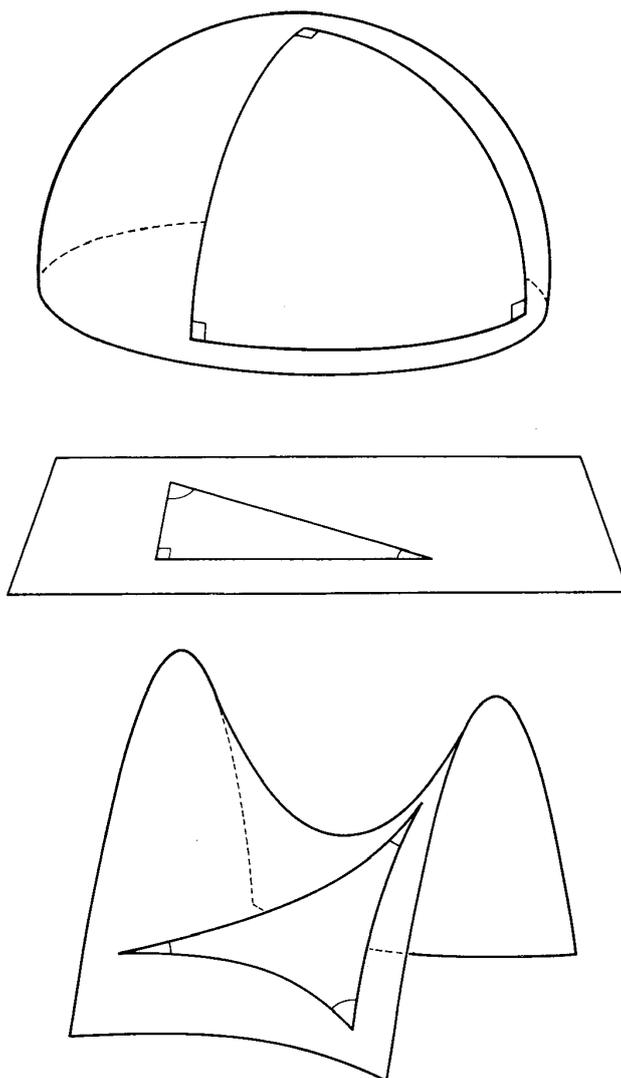


Abbildung 6.32: Innere Geometrie

Alle Eigenschaften des vorigen Kapitels waren lokale Eigenschaften: Krümmung einer Kurve, Geschwindigkeit, usw.