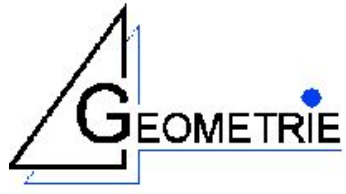
Selbstkorrigierende Aufgaben am Tetraeder

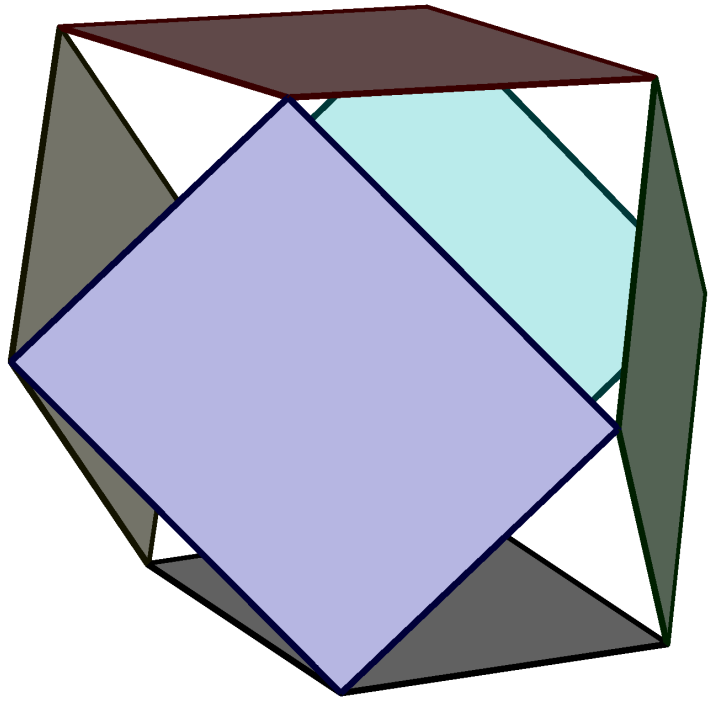
Hans-Peter Schröcker

Arbeitsbereich für Geometrie and CAD
Universität Innsbruck

33. Fortbildungstagung für Geometrie
Strobl, 5.–8. November 2012

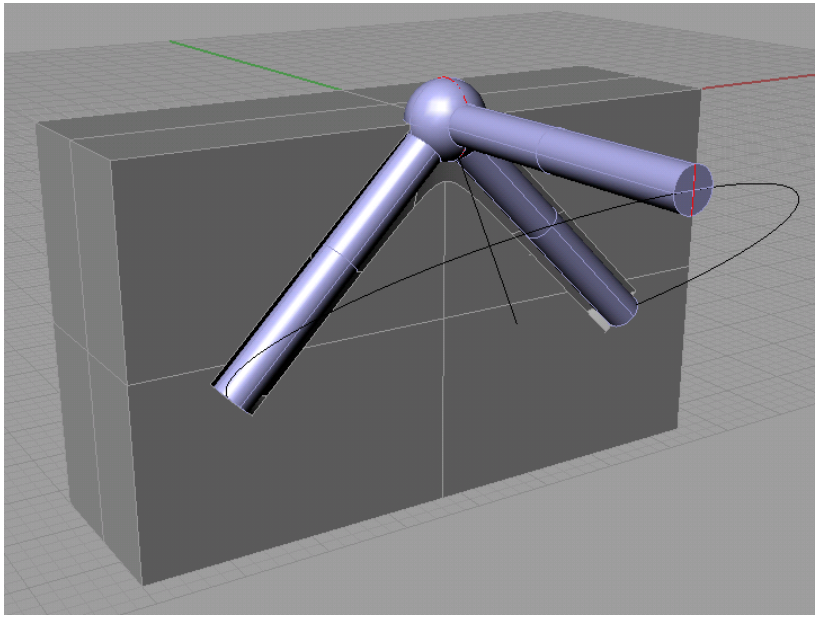


Ziele des Vortrags



- »Angewandte« und »reine« Aufgaben
- Vorstellung einiger »reiner« Aufgaben
- Beweisideen

»Angewandte« Aufgaben



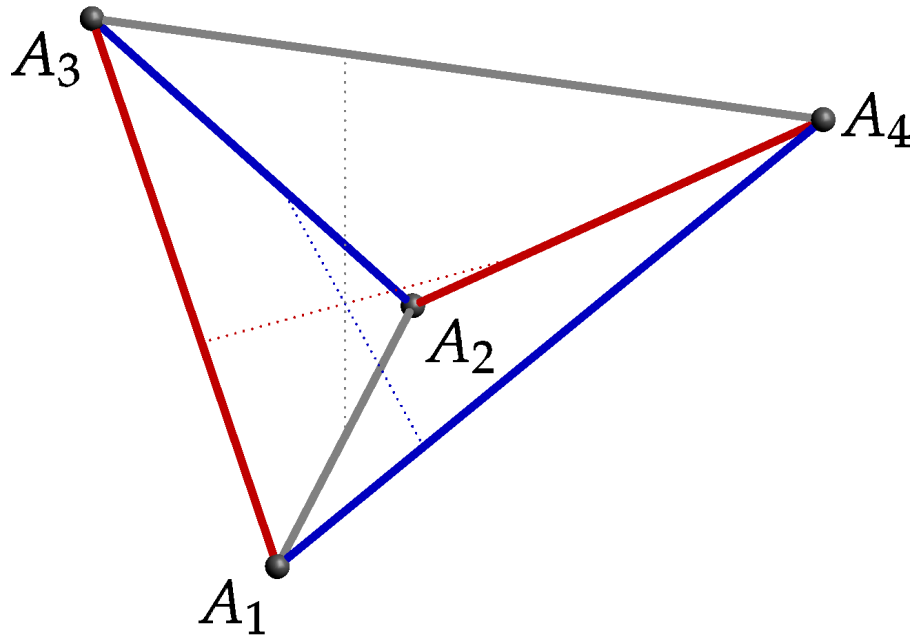
(Drehkreuz nach Fuhs und Stachel, 1988)

Selbstkorrigierende Aufgaben am Tetraeder

Tetraeder: Geordnetes Quadrupel $A_1A_2A_3A_4$ von vier nicht-komplanaren Punkten.

- Aufgabenstellung und Lösung erfordern lediglich Inzidenzen und Orthogonalität.
- Die Lösung ist eher systematisch als »kniffelig«.
- Die letzten geforderten Inzidenzen oder Orthogonalitäten ergeben sich automatisch.
- Es ist sofort offensichtlich, ob die Aufgabe richtig gelöst wurde oder nicht.
- Die Lösung der Aufgabe endet mit einem Überraschungseffekt.

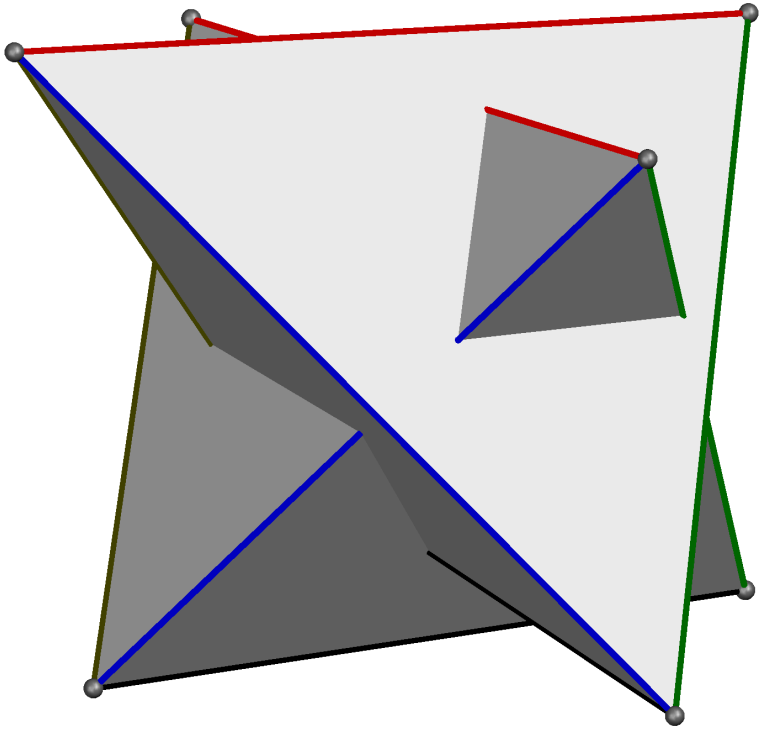
Orthogonale Tetraeder

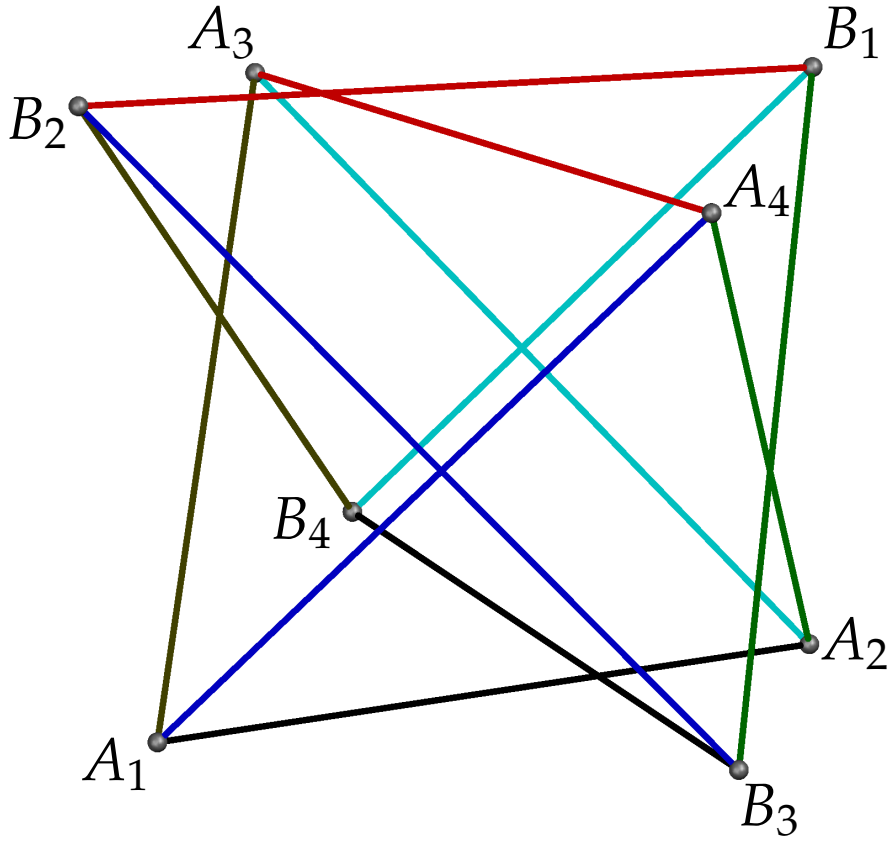


Aufgabe

Konstruieren Sie ein orthogonales Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ (gegenüberliegende Seiten sind orthogonal).

Orthogonale Tetraeder

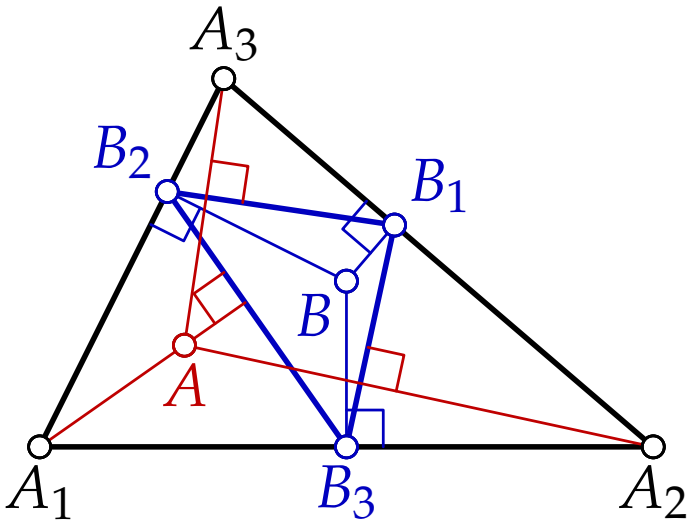


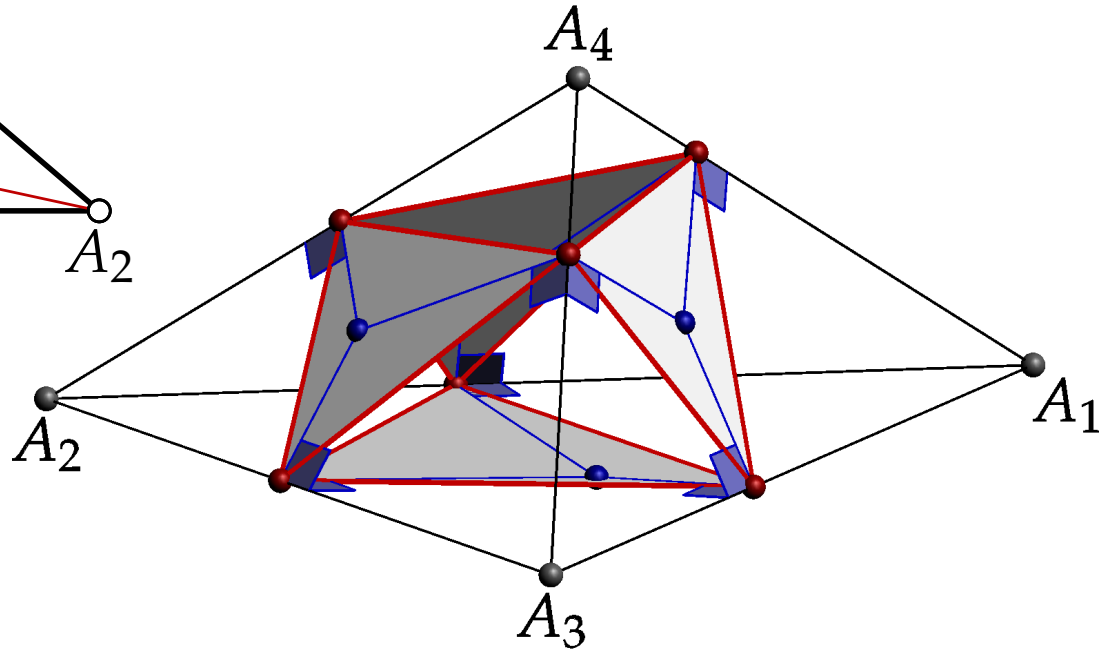


Aufgabe

Konstruieren Sie ein Paar orthogonaler Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ (gegenüberliegende Seiten der beiden Tetraeder sind orthogonal).

Fußpunktsketten

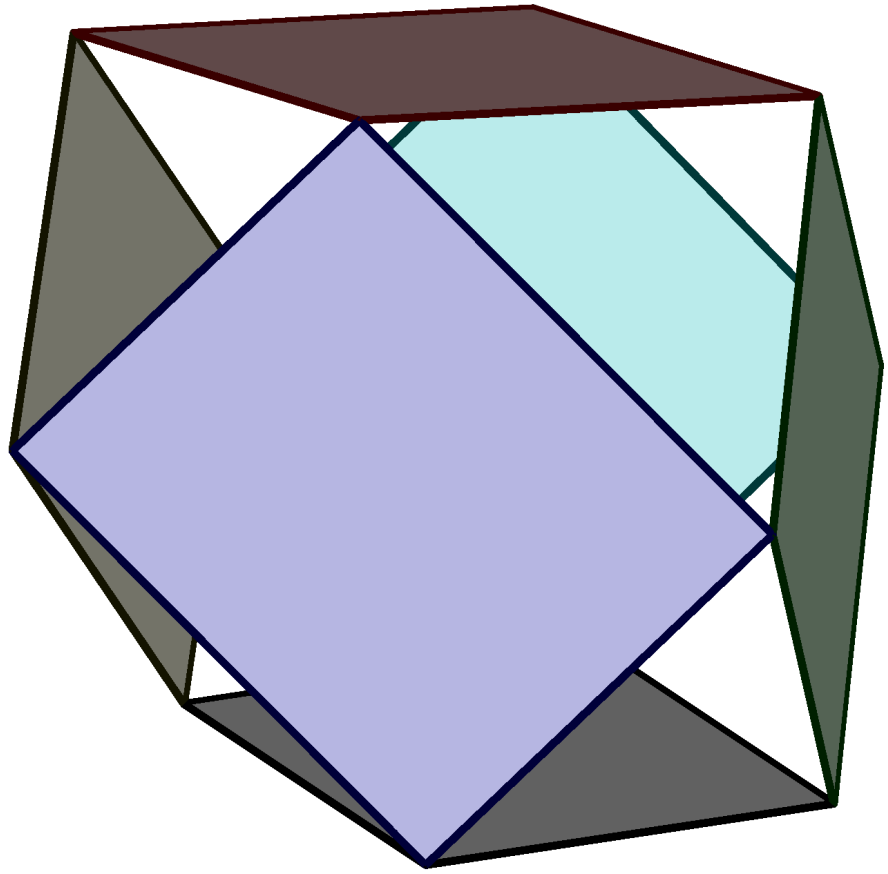




Aufgabe

Konstruieren Sie eine geschlossene Fußpunktskette auf einem Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$.

Saturiertes System von sechs Rechtecken

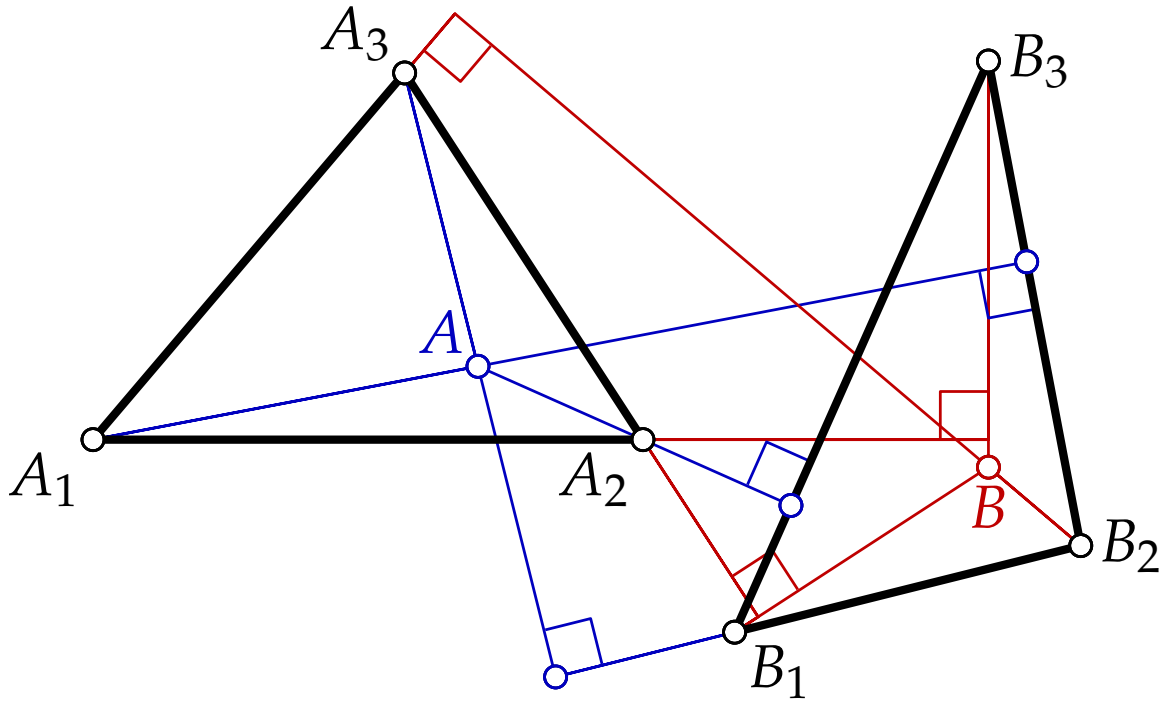


Aufgabe

Konstruieren Sie ein saturiertes System von sechs Rechtecken.

Warum Beweise sein müssen . . .

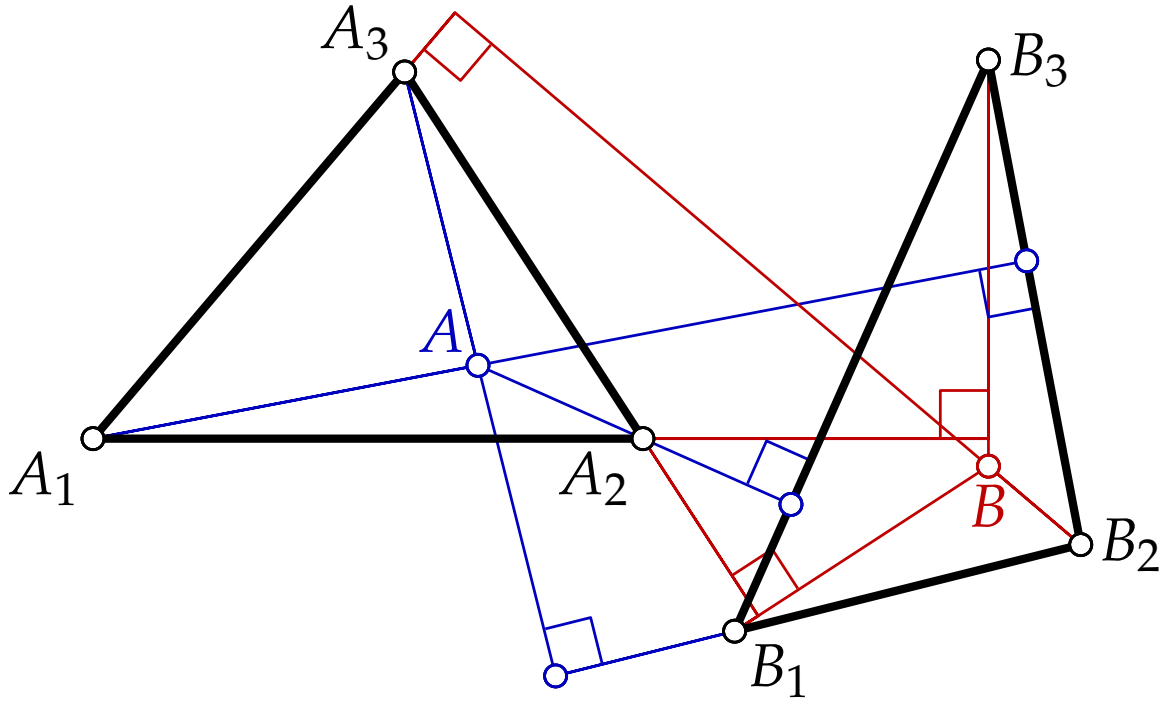
Orthologe Dreiecke



Definition

Zwei Dreiecke $A_1A_2A_3$ und $B_1B_2B_3$ heißen ortholog, wenn sich die drei Geraden durch Ecken von $A_1A_2A_3$ und orthogonal zu gegenüberliegende Seitenkanten von $B_1B_2B_3$ in einem Punkt A (dem Orthologiezentrum) schneiden.

Orthologe Dreiecke



Satz

Auch die Geraden durch Ecken von $B_1B_2B_3$ und orthogonal auf gegenüberliegende Seitenkanten von $A_1A_2A_3$ schneiden sich in einem Orthologiezentrum B.

Orthologe Tetraeder

Definition

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ heißen ortholog, wenn sich die Geraden durch Ecken von $A_1A_2A_3A_4$ und orthogonal zu gegenüberliegenden Seitenflächen von $B_1B_2B_3B_4$ in einem Orthologiezentrum A schneiden.

Satz

Auch die Geraden durch Ecken von $B_1B_2B_3B_4$ und orthogonal auf gegenüberliegende Seitenflächen von $A_1A_2A_3A_4$ schneiden sich in einem Orthologiezentrum B.

Orthogonale Tetraeder

Definition

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ heißen orthogonal, wenn jeweils gegenüberliegende Kanten orthogonal sind.

Satz

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ sind genau dann ortholog wenn sie orthogonal sind.

Orthogonale Tetraeder

Definition

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ heißen orthogonal, wenn jeweils gegenüberliegende Kanten orthogonal sind.

Satz

Zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ sind genau dann ortholog wenn sie orthogonal sind.

Beweis.

ortholog $\Longrightarrow$ orthogonal:

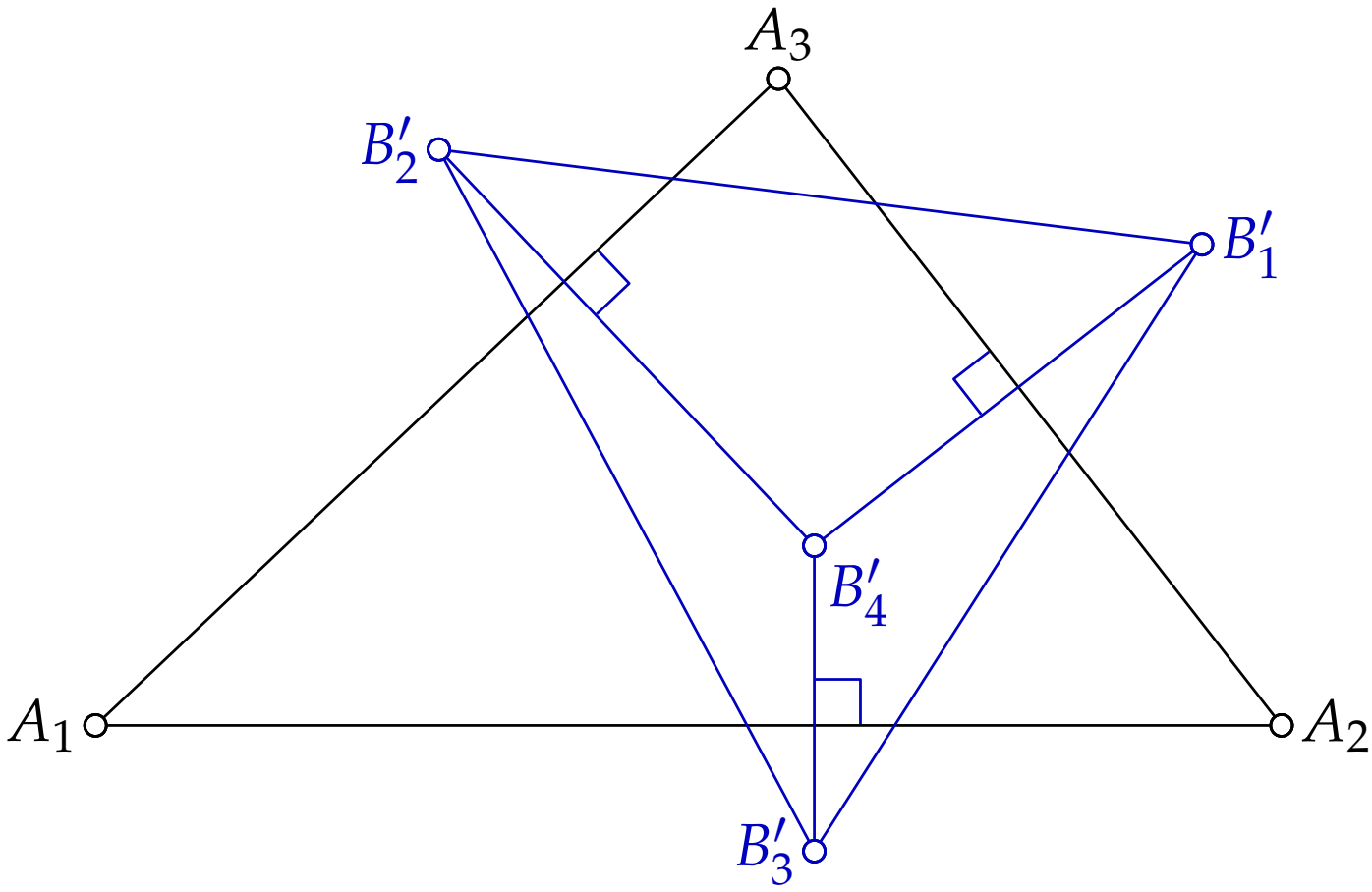
- $A_1A \perp B_2B_3B_4$
- $A_2A \perp B_1B_3B_4$
- $A_1A_2A \perp B_3B_4$
- $A_1A_2 \perp B_3B_4$

□

Orthogonale Tetraeder

Beweis.

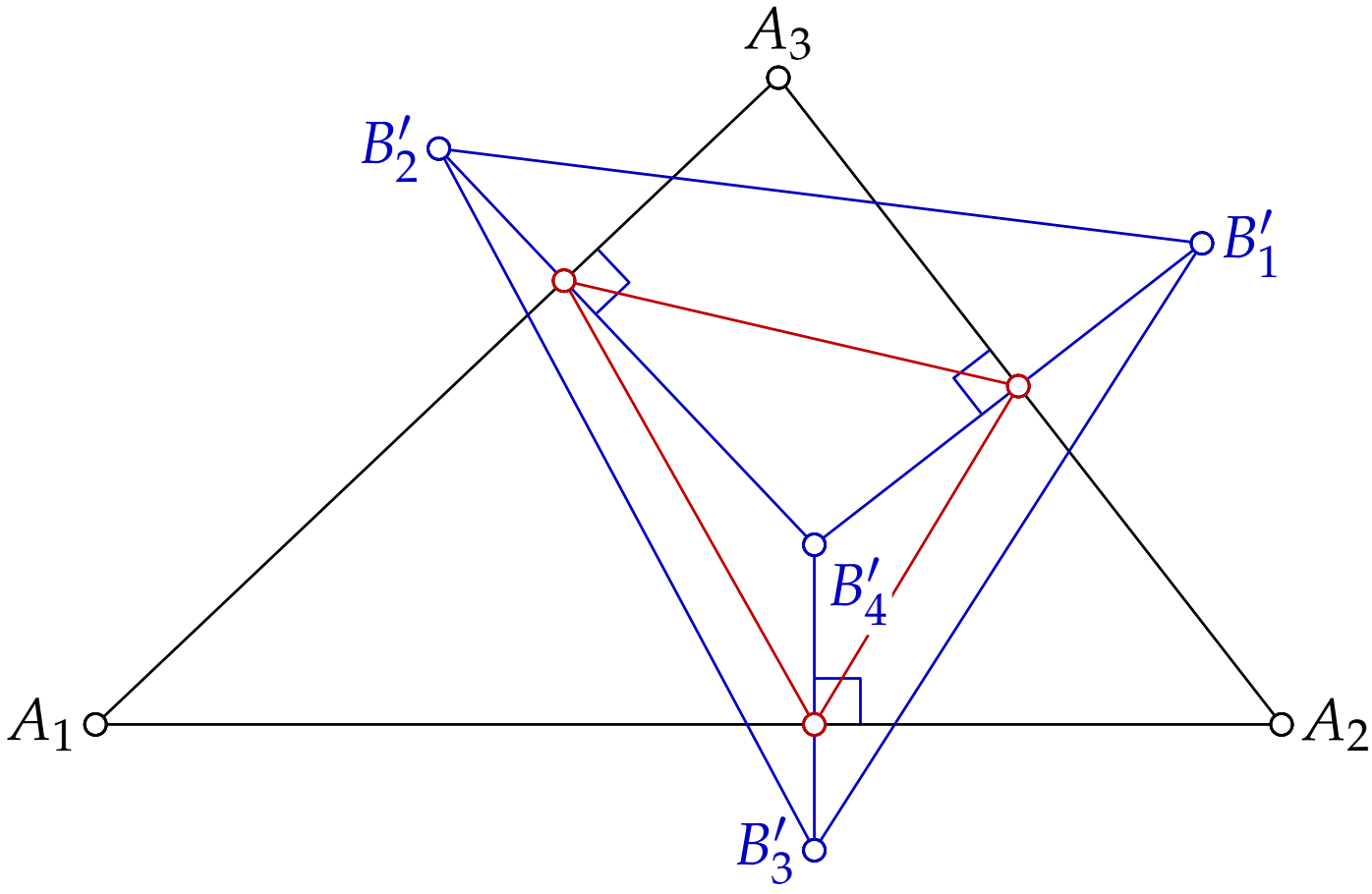
orthogonal $\Longrightarrow$ ortholog:



Orthogonale Tetraeder

Beweis.

orthogonal $\Longrightarrow$ ortholog:

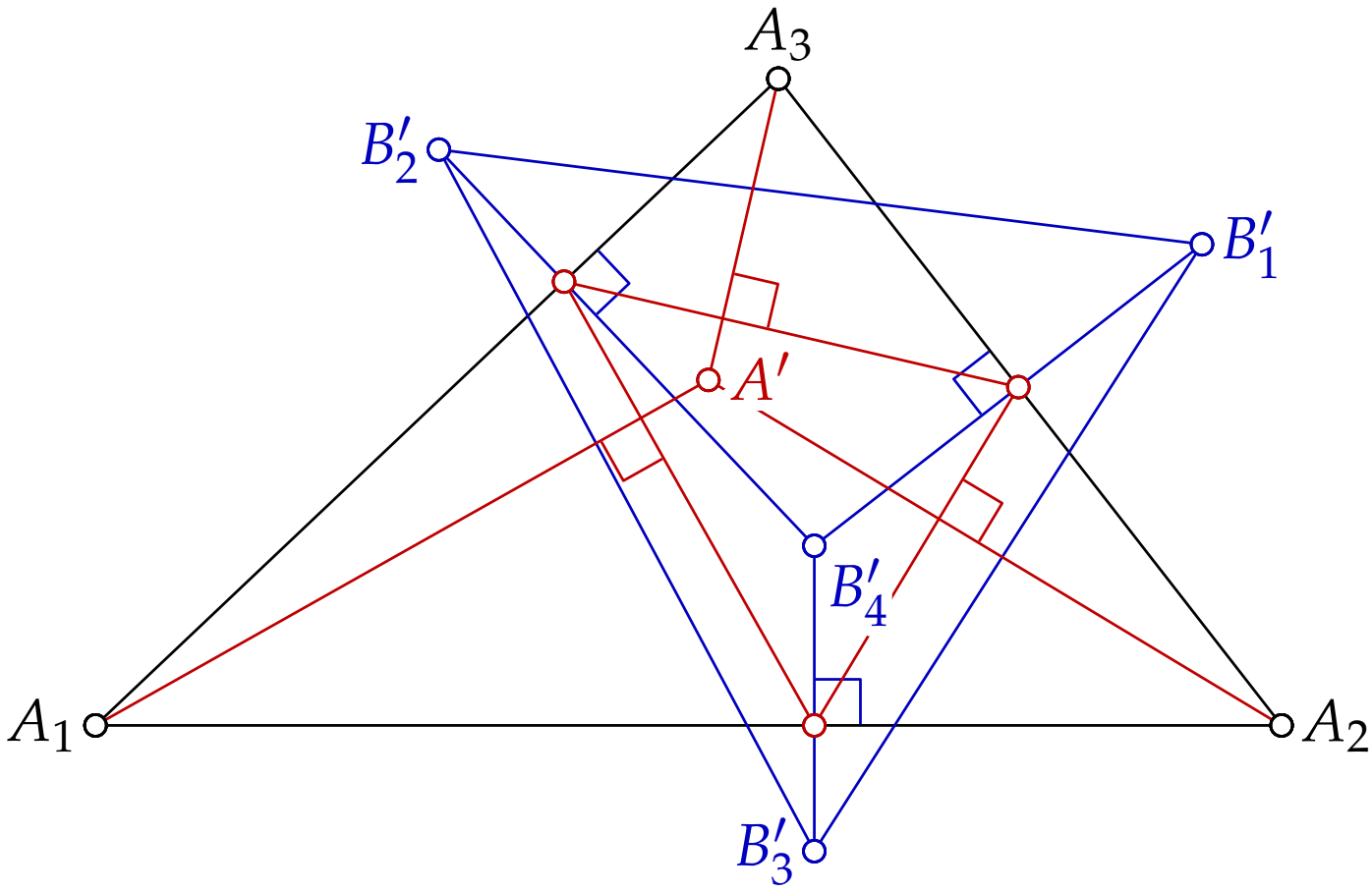


□

Orthogonale Tetraeder

Beweis.

orthogonal $\Longrightarrow$ ortholog:



□

Folgerungen

Der Beweis zeigt die Äquivalenz von Orthogonalität und Existenz eines Orthologiezentrums A:

$$A \text{ existiert} \iff \text{Tetraeder orthogonal} \iff B \text{ existiert}$$

Die Definition von »ortholog« ist daher symmetrisch.

Folgerungen

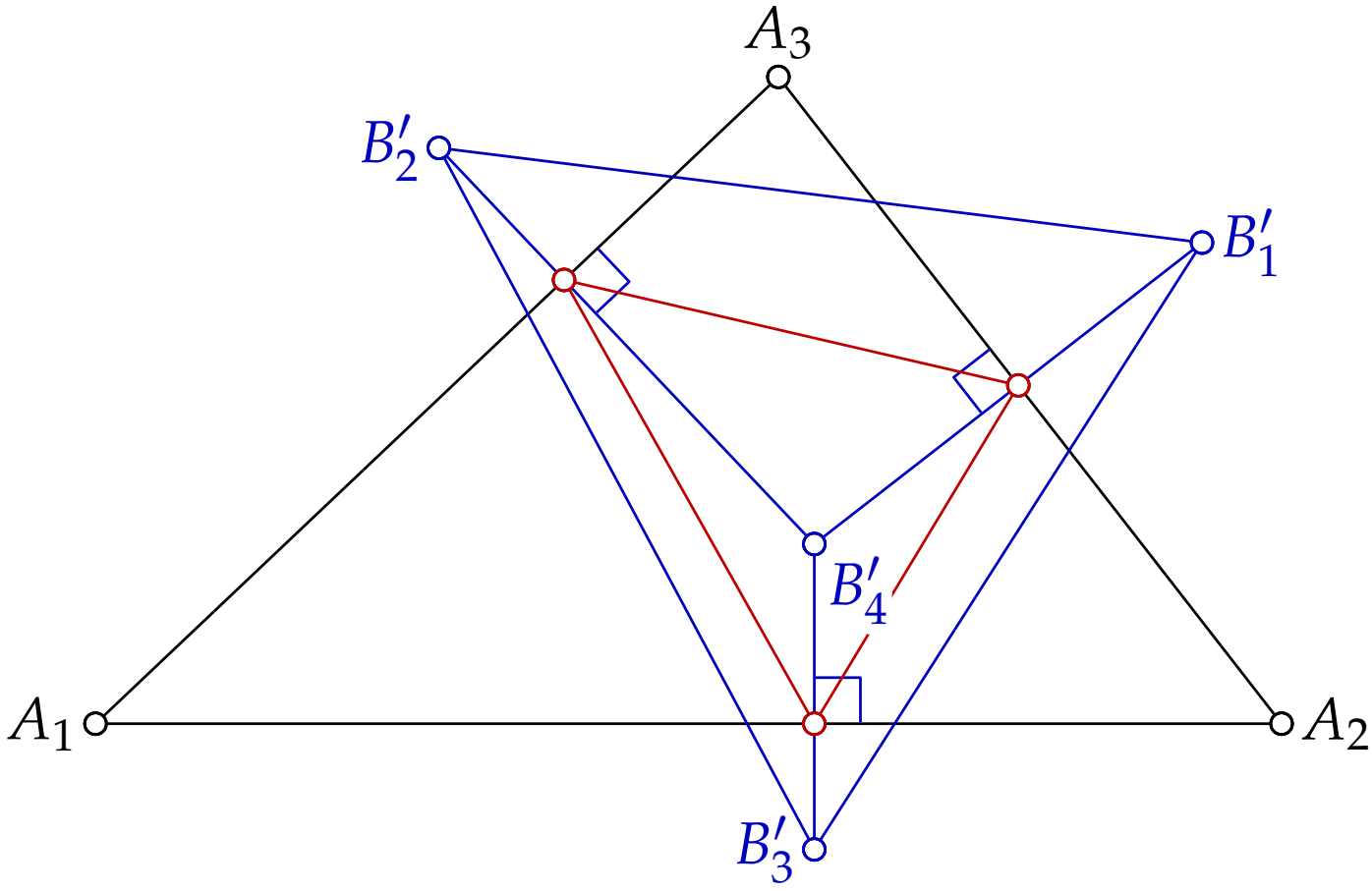
Orthogonalität von fünf Kantenpaaren impliziert Existenz eines Orthologiezentrums. Daher gilt:

Satz

Sind fünf gegenüberliegende Kantenpaare der Tetraeder $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ orthogonal, so gilt das auch für das sechste.

Folgerungen

Sind $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ ortholog, so liefern die Normalprojektionen von B_1, B_2, B_3, B_4 auf die gegenüberliegenden Seitenebenen von $A_1A_2A_3A_4$ die Pole einer geschlossenen Fußpunktskette.

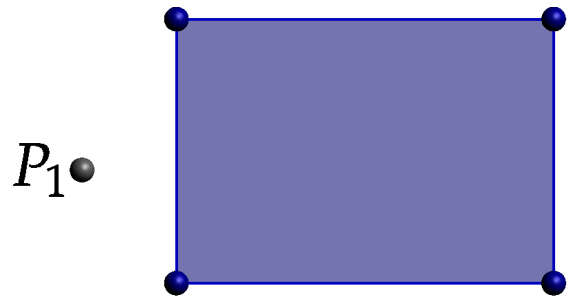


Saturierte Rechtecksketten

Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Viereckdiagonalen orthogonal sind.

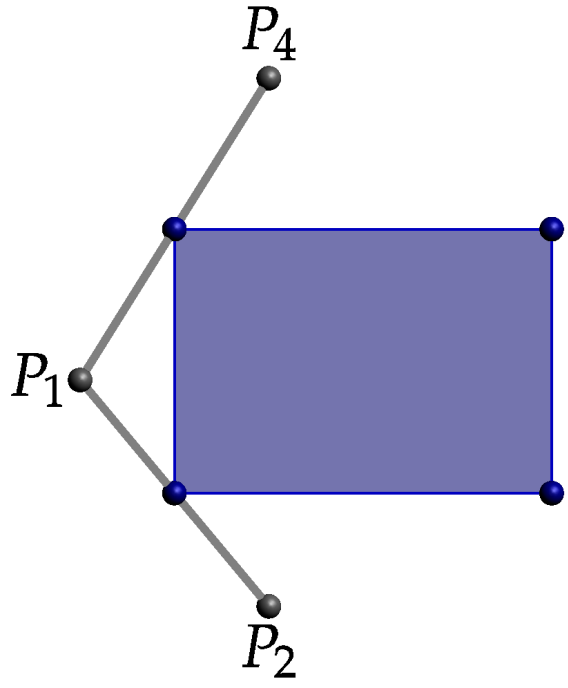
Saturierte Rechtecksketten



Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Viereckdiagonalen orthogonal sind.

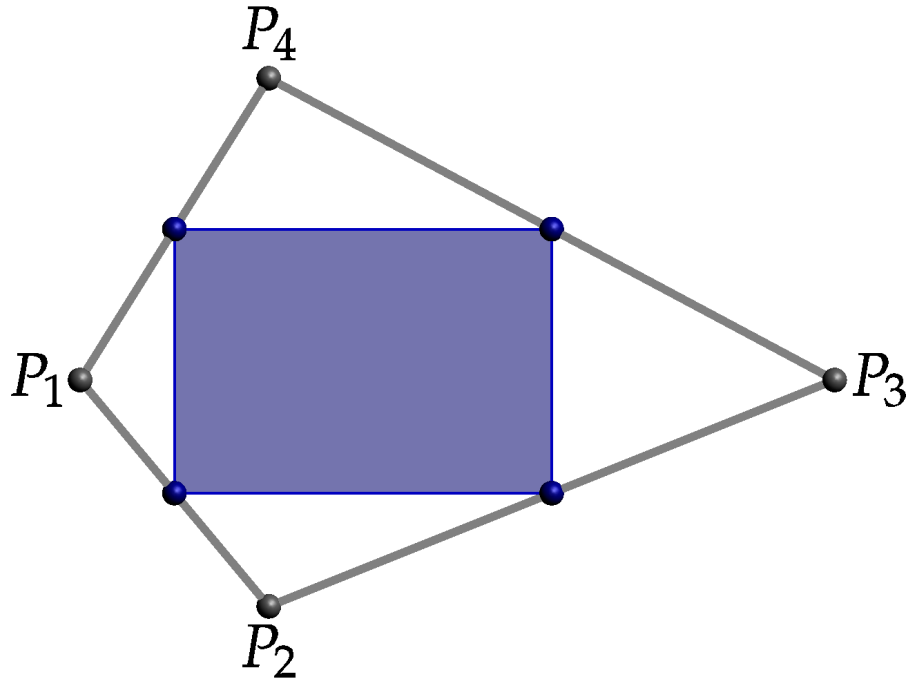
Saturierte Rechtecksketten



Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Viereckdiagonalen orthogonal sind.

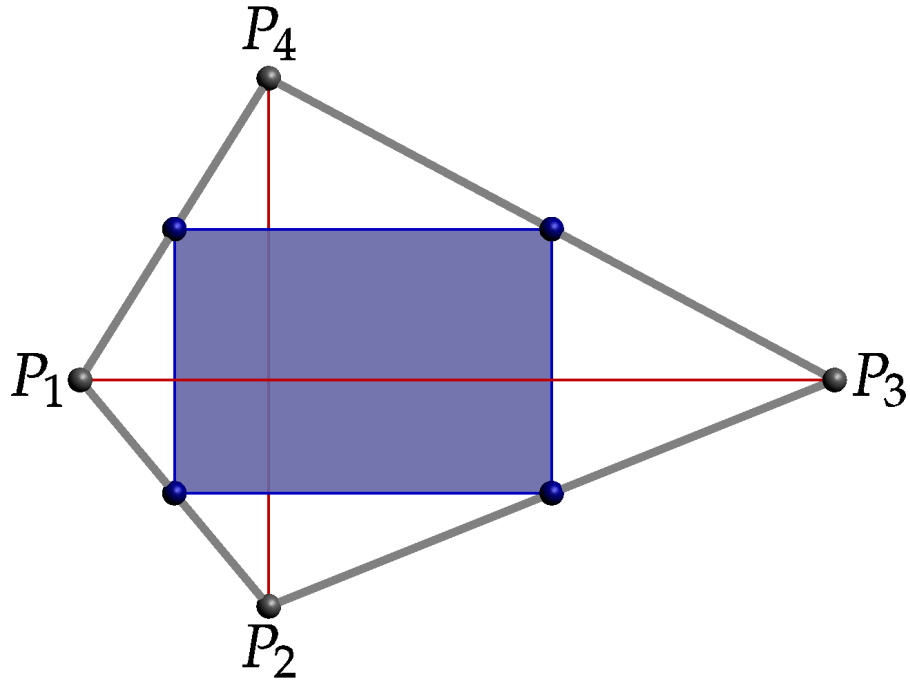
Saturierte Rechtecksketten



Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Viereckdiagonalen orthogonal sind.

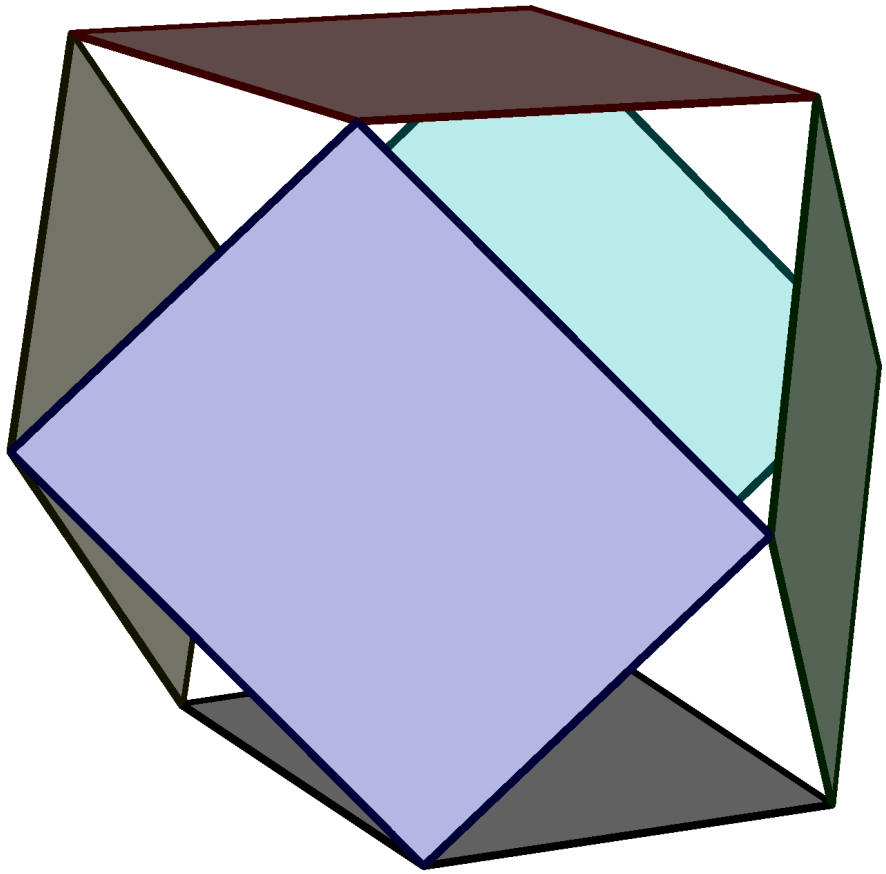
Saturierte Rechtecksketten



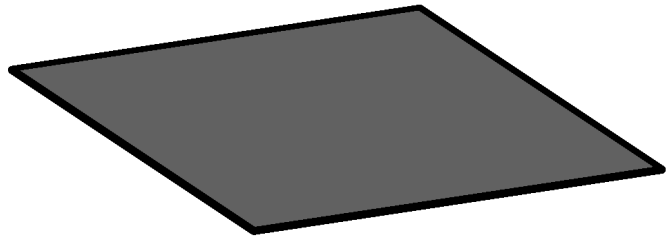
Lemma

Das Seitenmittenparallelogram eines räumlichen Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ ist genau dann ein Rechteck, wenn die Viereckdiagonalen orthogonal sind.

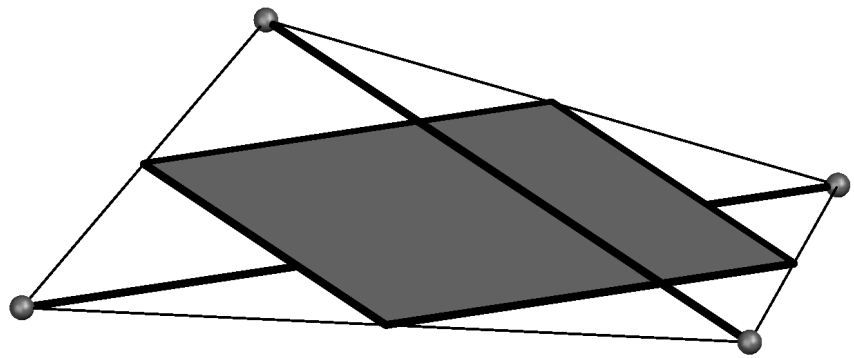
Saturierte Rechtecksketten



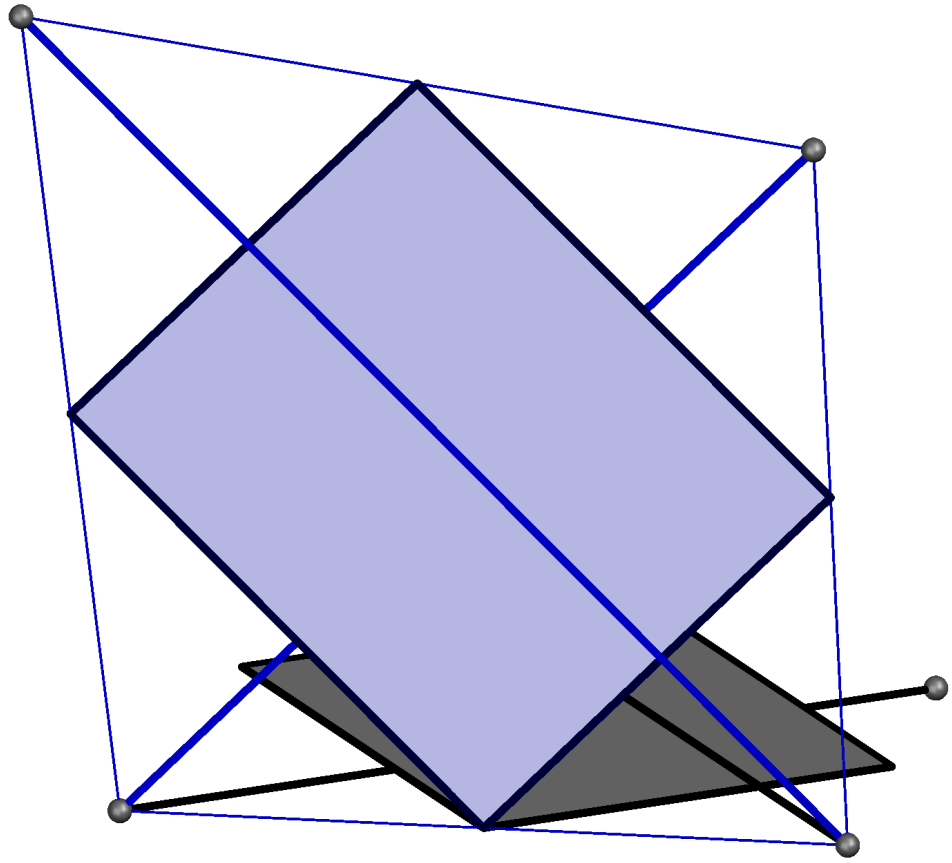
Saturierte Rechtecksketten



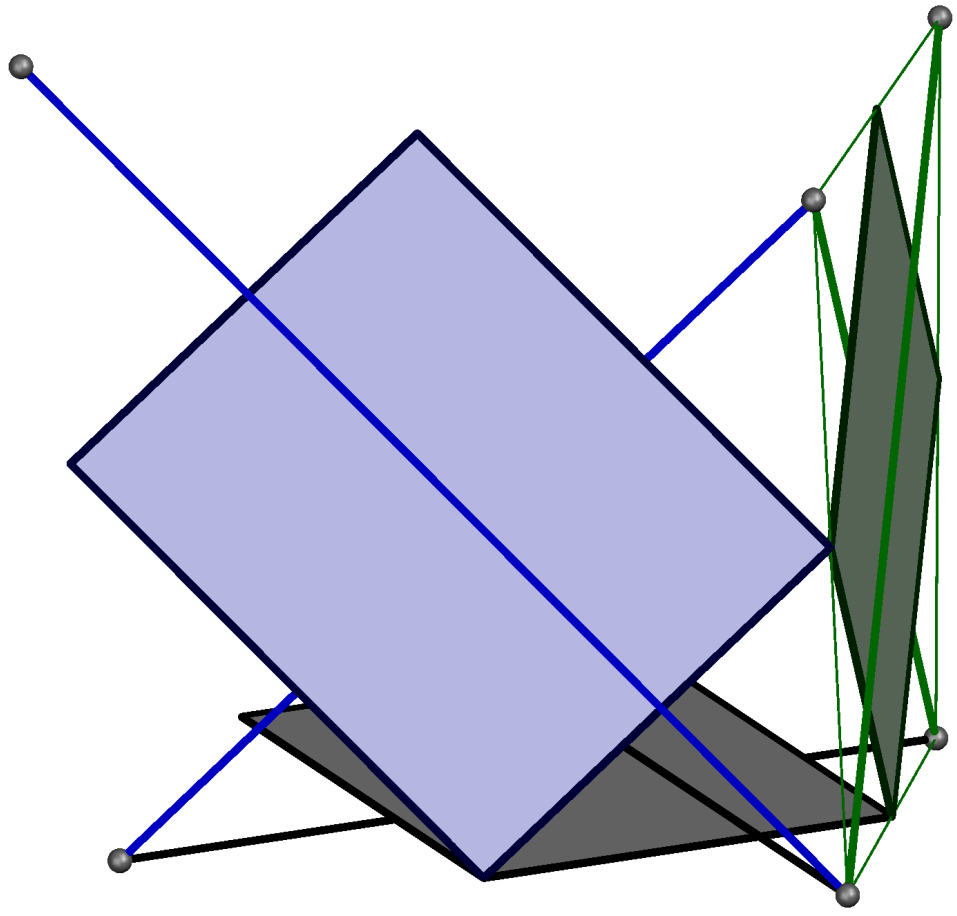
Saturierte Rechtecksketten



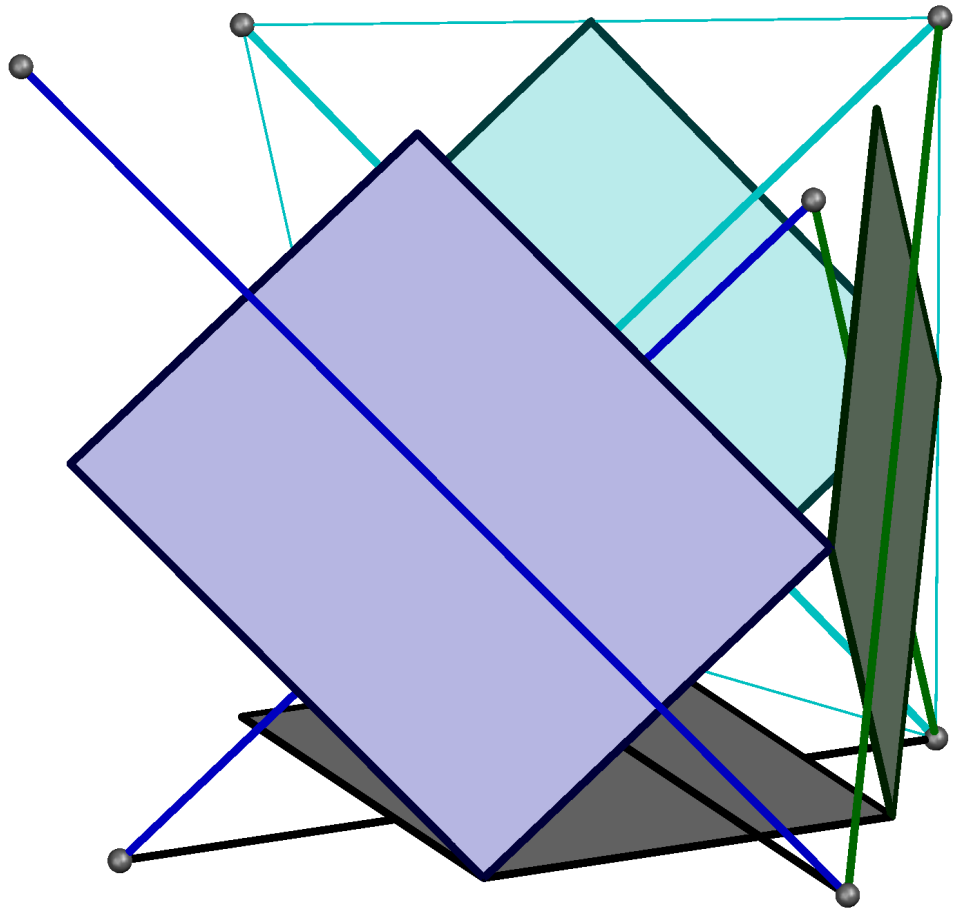
Saturierte Rechtecksketten



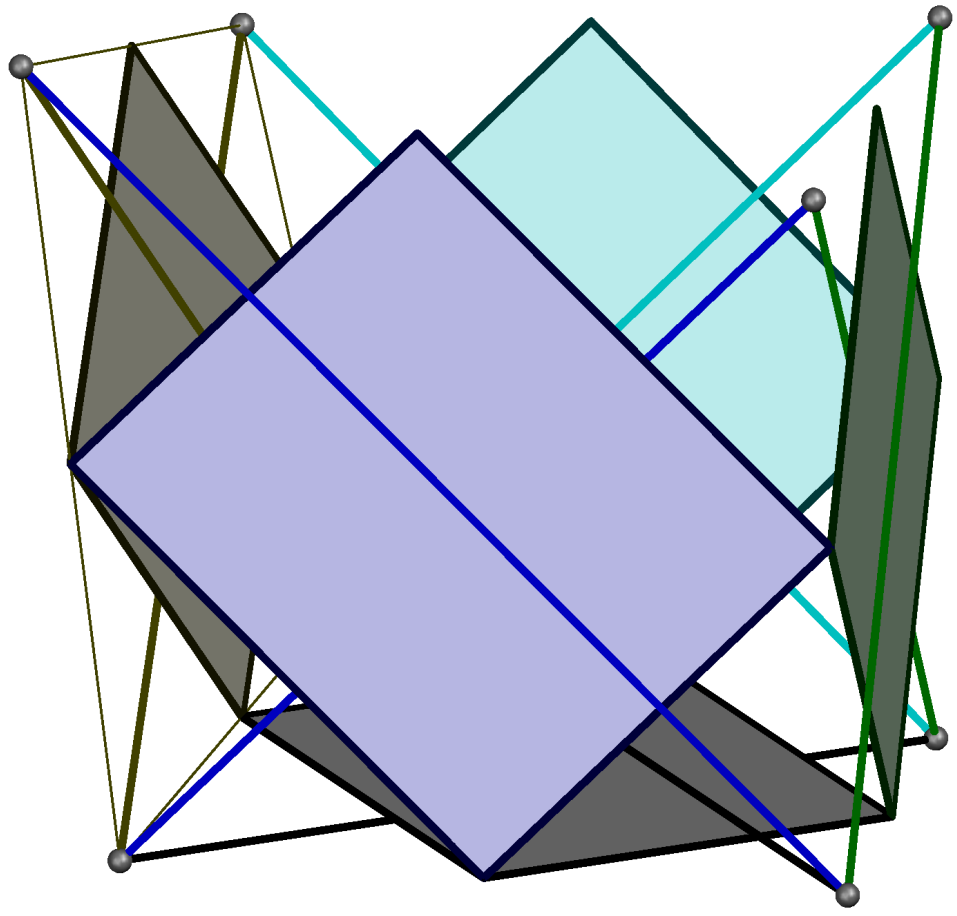
Saturierte Rechtecksketten



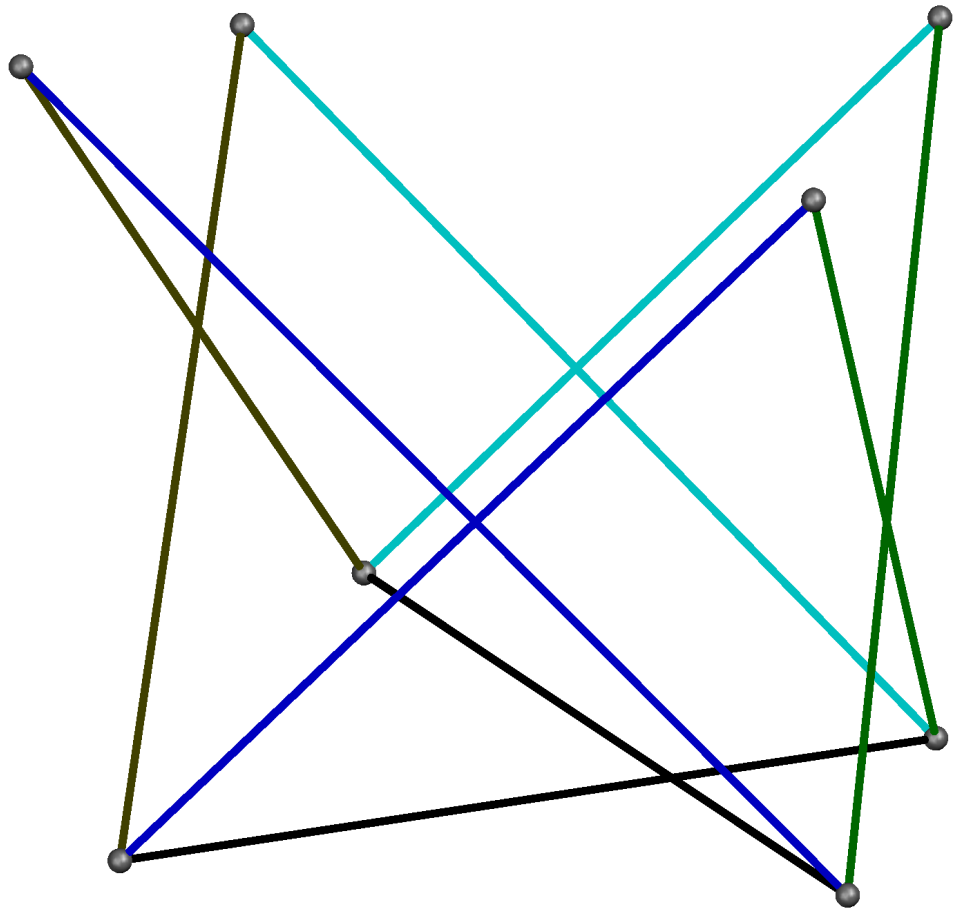
Saturierte Rechtecksketten



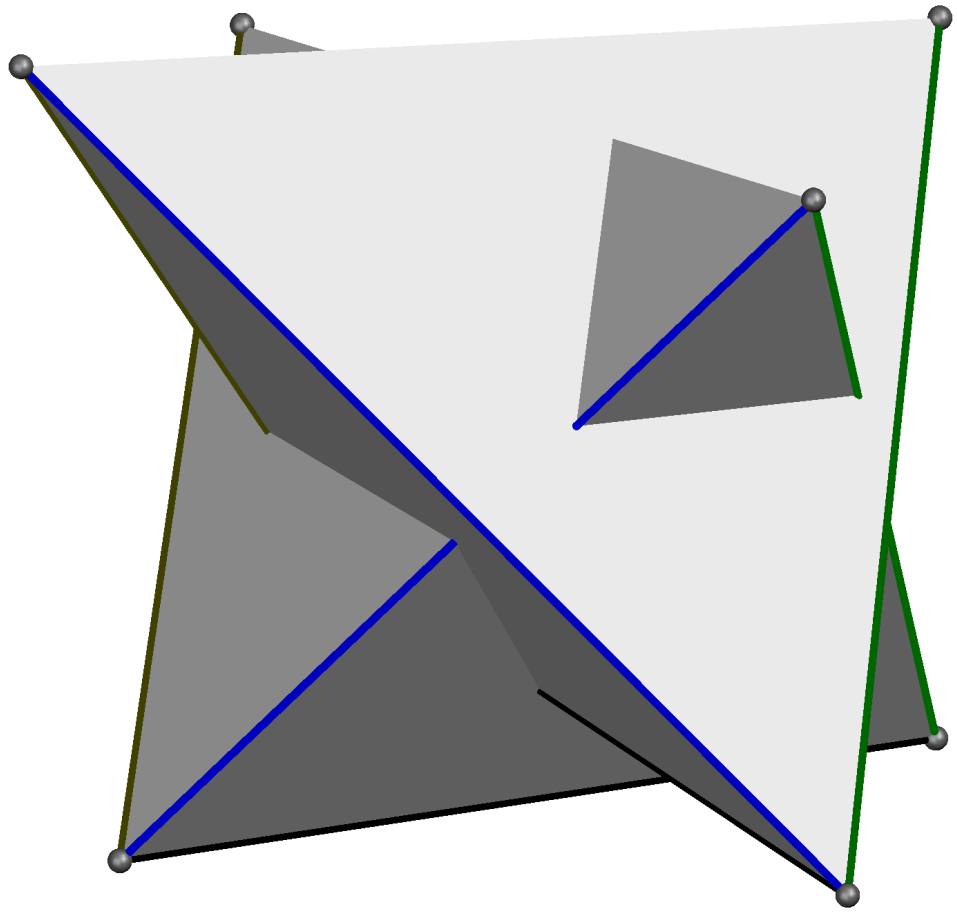
Saturierte Rechtecksketten



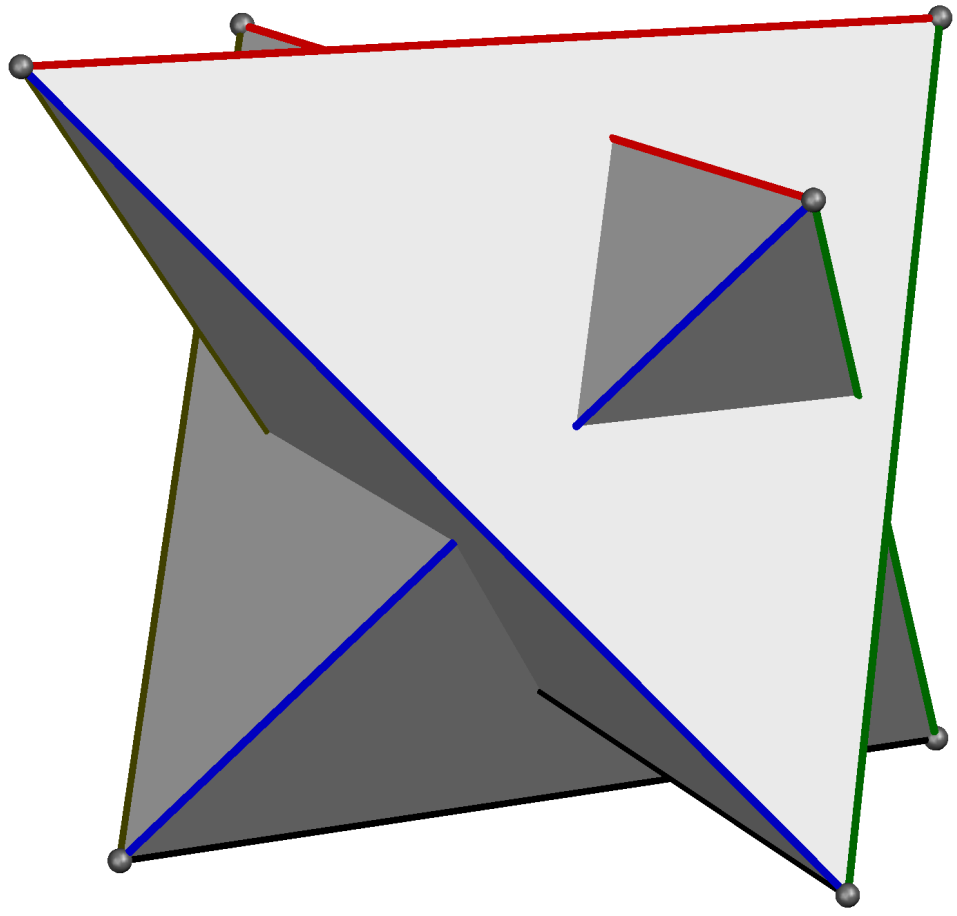
Saturierte Rechtecksketten



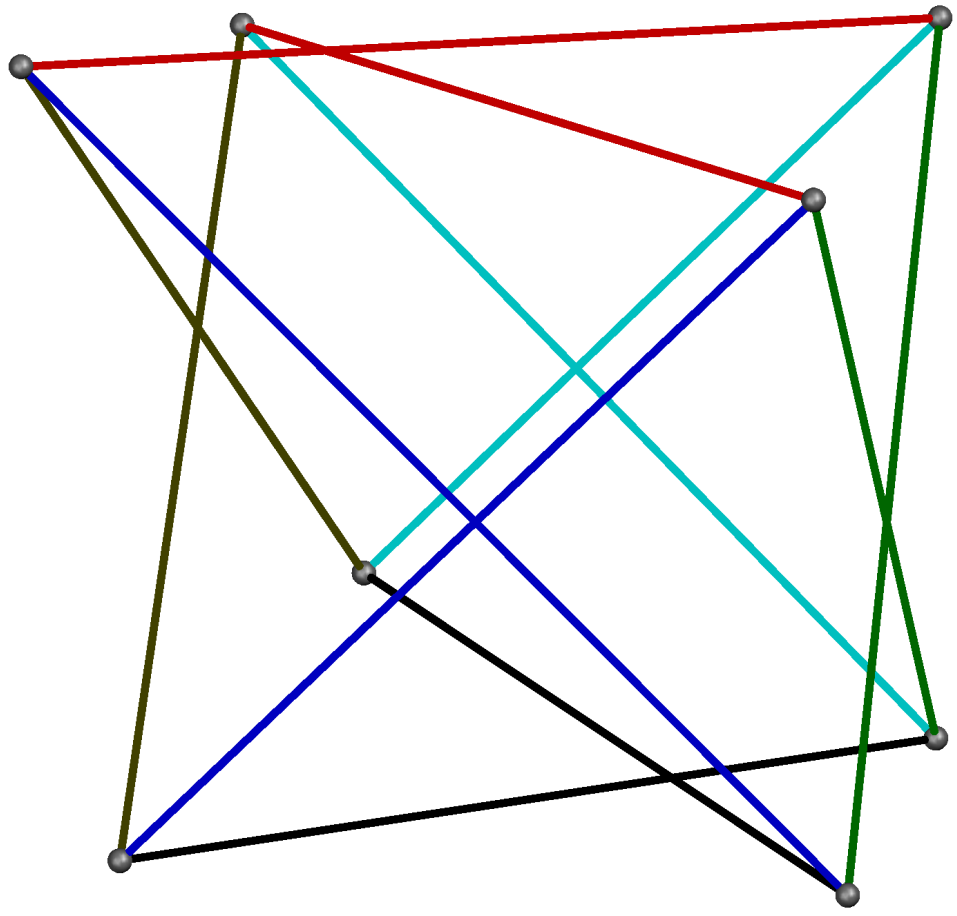
Saturierte Rechtecksketten



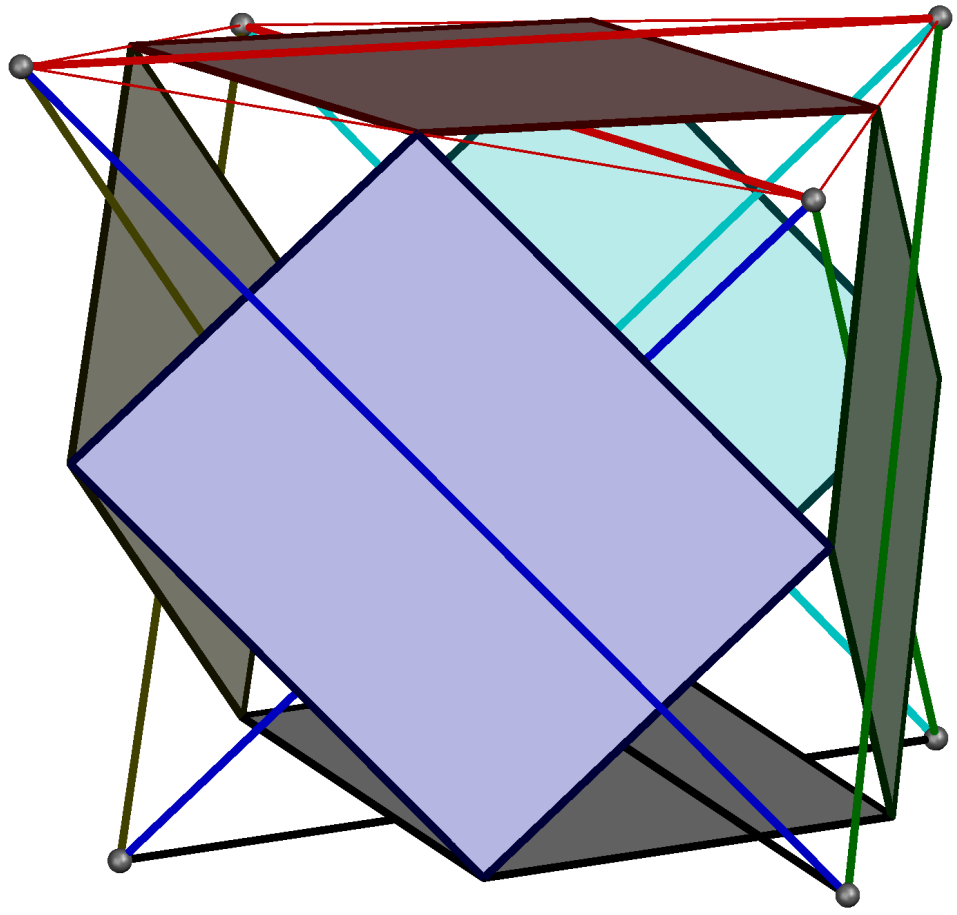
Saturierte Rechtecksketten



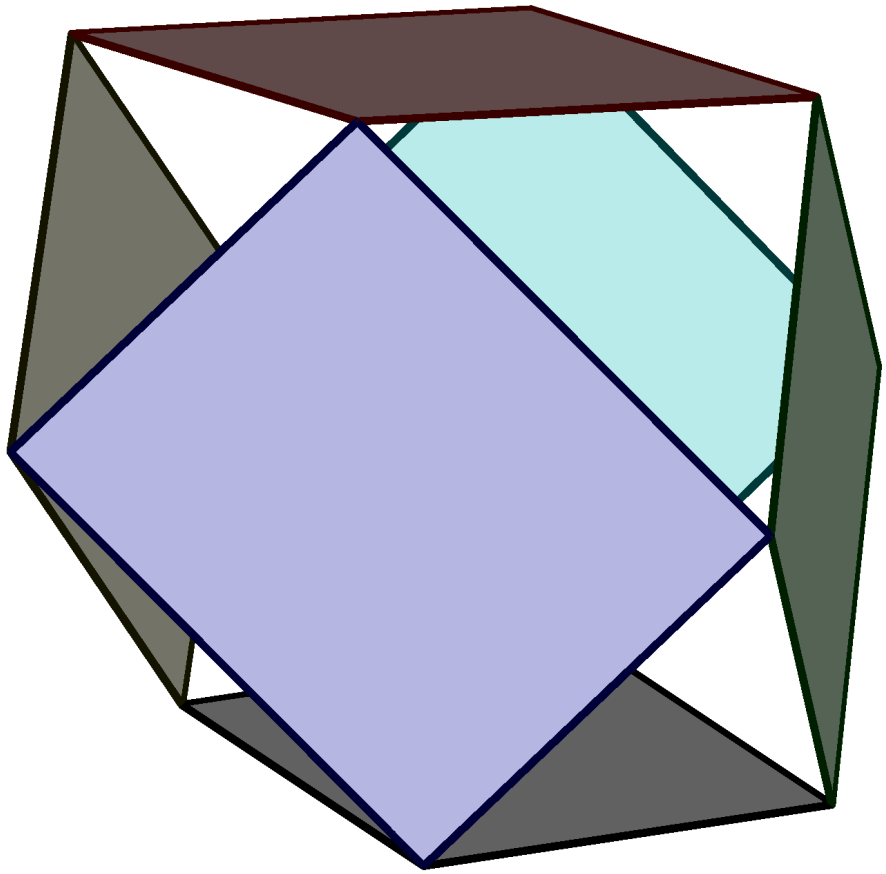
Saturierte Rechtecksketten



Saturierte Rechtecksketten



Saturierte Rechtecksketten



Workshop

- Mittwoch, 7. November 2012, 14:30–16:00

Literatur

H.-P. Schröcker
Selbstkorrigierende Aufgaben am Tetraeder
Inf. Bl. Geom., 30(2):27–29, 2011.

H.-P. Schröcker
Diskrete Geometrie
Vorlesungsskriptum, Hochschullehrgang Darstellende Geometrie, PH Tirol, 2011.